Ministero Dell'Istruzione
CENTRO PROVINCIALE ISTRUZIONE ADULTI DI UDINE
UDINE - CIVIDALE DEL FRIULI – CODROIPO – GEMONA DEL FRIULI - SAN GIORGIO DI N. – TOLMEZZO
Via Diaz n° 60 – 33100 UDINE (UD) – telefono 0432500634
Codice fiscale 94134770307 - *Codice Scuola – UDMM098007*
e-mail: UDMM098007@istruzione.gov.it *Posta certificata:* - UDMM098007@pec.istruzione.it
Sito web www.cpiaudine.edu.it

Secondo periodo didattico	**Asse matematico-scientifico-tecnologico** **Matematica**
COMPETENZA N. 1	**Uda: ARITMETICA E ALGEBRA**
Argomento: **Equazioni di primo grado**	**Ore Fad:**

ANNO SCOLASTICO 2021/2022

TITOLO: EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

CONTENUTI	- IDENTITA' ED EQUAZIONE - EQUAZIONE EQUIVALENTE - EQUAZIONE DI PRIMO GRADO - EQUAZIONI INTERE
MATERIALE DIDATTICO	**Testo**: studiare il contenuto del documento **Video**: https://www.youtube.com/watch?v=UU09LqyGzm8
Cosa impariamo a fare	Dallo studio del testo sarà possibile: - Definire un'equazione e classificarla - Risolvere equazioni di primo grado numeriche - Individuare strategie appropriate per risolvere problemi che hanno come modello equazioni
ISTRUZIONI PER LO STUDIO A CASA **Leggere il testo, rispondere ai quesiti in itinere e svolgere gli esercizi assegnati presenti in fondo all'unità.**	
VERIFICA/CONSEGNA	Inviare a COGNOME documento Google oppure COGNOME_FOTO.jpg Indica nell'OGGETTO della mail il COGNOME. **Scadenza:** 15 giorni

TESTO

Equazioni di primo grado numeriche intere

1. Introduzione alle equazioni

Che cos'è un'equazione?

Scritture come:

$9=3^2$ $\frac{1}{5}=5^{-1}$ $5^3 : 5^2 = 5$

sono costituite da numeri tra i quali è posto il simbolo di uguale: queste scritture, sono chiamate uguaglianze.

Anche una scrittura come $2x - 7= x+3$ è un'uguaglianza, ma presenta un'importante differenza rispetto alle precedenti: l'uguaglianza non è tra numeri ma tra espressioni algebriche. In altre parole: nell'uguaglianza non compaiono solo numeri ma anche lettere.

Alle uguaglianze di questo tipo si dà un nome particolare.

Si chiama **equazione** ogni uguaglianza tra due espressioni, contenente una o più lettere.

Per esempio, sono equazioni:

$x+2(x-3) =x+1$, $x^2 = 3x + 4$, $x^2 + y^2 = 2$

L'espressione a sinistra del simbolo di uguaglianza si chiama **primo membro** dell'equazione; l'espressione a destra del simbolo di uguaglianza si chiama **secondo membro** dell'equazione.

Per esempio, nell'equazione $x + 2(x - 3) = x + 1$, abbiamo che:

$$\underbrace{x+2(x-3)}_{1° \text{ membro}} = \underbrace{x+1}_{2° \text{ membro}}$$

Un' **equazione** è in **forma normale** se al primo membro ha un solo termine contenente l'incognita e al secondo membro ha solo un termine noto.

$4x = 5$, $7x = 9$ o $12x = 7$ sono equazioni ridotte a forma normale.

Le lettere che compaiono in un'equazione (escludendo eventuali costanti) possono essere incognite oppure parametri:

- le incognite sono le lettere di cui non è noto il valore numerico; la risoluzione di un'equazione consiste proprio nella ricerca dei numeri che, sostituiti al posto delle incognite, la trasformano in un'uguaglianza vera;
- i parametri sono lettere da considerare come costanti, cioè lettere che rappresentano un valore che si suppone noto, ma che non è specificato per conferire al problema maggiore generalità.

ESEMPI:

a. $x + 2(x-3) = x + 1$ è un'equazione nell'incognita x che non contiene parametri.

b. L'equazione nell'incognita x:
$x+2(x-3) = t x + 1$ contiene il parametro t.

Se in un'equazione compare una sola lettera, essa deve essere necessariamente un'incognita; nelle equazioni in cui compaiono più lettere, invece, esse possono essere o tutte incognite oppure in parte incognite e in parte parametri.

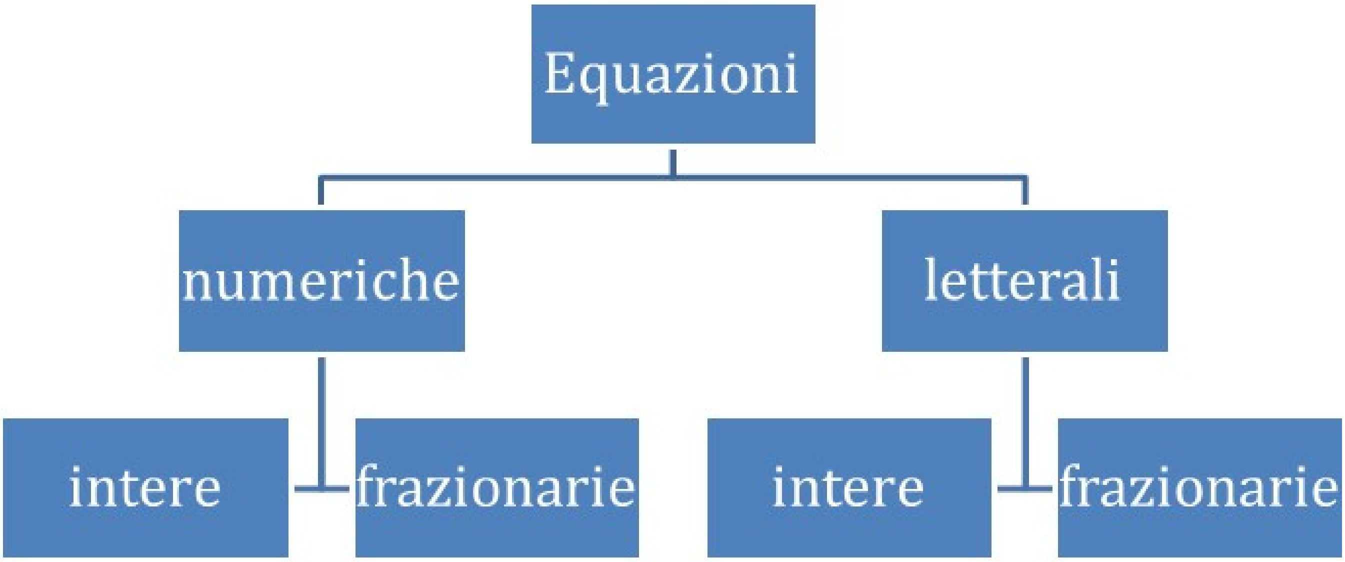
Classificazione delle equazioni

Un'equazione in cui l'incognita non figura in alcun denominatore si dice *intera*;
un'equazione in cui l'incognita compare in almeno un denominatore si dice *frazionaria*.

a. $x + x^2 = 2x + \frac{1}{2}$ è un'*equazione intera* perché al denominatore c'è un numero.

b. $x + x^2 = 2x + \frac{1}{x+1}$ è un'*equazione frazionaria* perché l'incognita compare anche al denominatore.

Un'equazione si dice numerica se i due membri dell'equazione contengono solo numeri oltre alle incognite; si dice letterale se, oltre alle incognite, compare almeno un parametro.
Nelle equazioni letterali occorre specificare di volta in volta quali lettere sono da considerare incognite e quali parametri.



a. L'equazione $2x^2 - x = x + \frac{1}{3}x$ è numerica, nell'incognita x.

b. L'equazione $2b + a = 1 - b$ può essere considerata:

- un'equazione letterale nell'incognita b, dove a è un parametro;
- un'equazione letterale nell'incognita a, dove b è un parametro;
- un'equazione nelle due incognite a e b.

Occorre quindi specificare quali lettere sono da considerare incognite e quali parametri.

Le soluzioni di un'equazione

Risolvere un'equazione nell'incognita x significa determinare, se esistono, i numeri che, sostituiti al posto di x, la trasformano in un'uguaglianza vera: questi numeri si chiamano soluzioni o radici dell'equazione.
Se un certo numero è una soluzione, si dice anche che questo numero soddisfa o verifica l'equazione data.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione: $x^2 - 1 = 0$

• 1 è una sua soluzione perché, sostituendo 1 al posto di x, si ottiene l'uguaglianza 1^2 - 1 = 0, cioè 0 = 0, che è vera;

• -2 non è una soluzione dell'equazione perché, sostituendo -2 al posto di x, si ottiene l'uguaglianza $(-2)^2$ -1 = 0, cioè 3 = 0, che è falsa.

Indicheremo con la lettera S l'insieme formato dalle soluzioni di un'equazione.
Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione x + 2 = 0 sarà indicato con S= {-2}.

ESEMPIO

L'equazione $2x = 1$, se assumiamo come dominio R, ammette come soluzione $x = \frac{1}{2}$

La stessa equazione non ammette soluzioni se assumiamo come dominio l'insieme N, perché non esiste alcun numero naturale che, moltiplicato per 2, dà come risultato 1.

Equazioni determinate, impossibili, indeterminate e identità

Si può effettuare una classificazione delle equazioni in base alle caratteristiche dell'insieme delle soluzioni.

L'insieme delle soluzioni può...	Esempio	L'equazione si dice...
essere finito	$2x = 4$ L'unica soluzione dell'equazione è 2, quindi $S = \{2\}$; S è un insieme finito.	propria o determinata
essere infinito	$\|x\| = x$ Questa equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali non negativi: per esempio $\|2\| = +2$, $\|-0{,}3\| \neq -0{,}3$, mentre $\|-2\| \neq -2$ $\|-0{,}3\| \neq -0{,}3$ l'insieme delle soluzioni è $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$; S è un insieme infinito.	indeterminata
essere vuoto	$x^2 = -1$ Ogni numero reale ha come quadrato un numero non negativo, quindi l'equazione non ha soluzioni: $S = \emptyset$.	impossibile

Tra le equazioni indeterminate, rivestono particolare importanza le identità.
Una identità è una uguaglianza tra due espressioni, contenente una o più lettere, verificata in corrispondenza di ogni valore reale attribuito alle lettere, con l’esclusione di quelli che fanno eventualmente perdere significato alle due espressioni.

ESEMPI

a. L'uguaglianza $2(x+2) = 2x+4$, in base alla proprietà distributiva, è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$. Dunque è un'identità.

b. Consideriamo l'uguaglianza $\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Essa perde di significato solo per $x = 1$, valore in corrispondenza del quale si annullano i denominatori. Con l'esclusione di questo valore di x, cioè per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $x \neq 1$, l'uguaglianza è soddisfatta, in base al prodotto notevole relativo al quadrato di un binomio: dunque è un'identità.

È chiaro che un'identità è una particolare equazione indeterminata (perché è soddisfatta in corrispondenza di infiniti valori reali, ovvero ha infinite soluzioni).
Invece un'equazione indeterminata non è necessariamente un'identità (ne è un esempio l'equazione IxI= x).

Prova tu
Vero o falso?

	V	F
a. l'equazione $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 1$ è frazionaria	☐	☐
b. l'equazione $a + 2x = 4x + bx$ è letterale, se considerata rispetto all'incognita x	☐	☐
c. 10 è una soluzione dell'equazione 10x — 1000 = 0	☐	☐
d. un'equazione che ha come insieme delle soluzioni $S = -1$ è determinata	☐	☐
e. l'equazione $x^2 = -2$ è impossibile	☐	☐
f. l'equazione $3x + 6 = 3(x+3)$ è un'identità	☐	☐

2. Principi di equivalenza per le equazioni

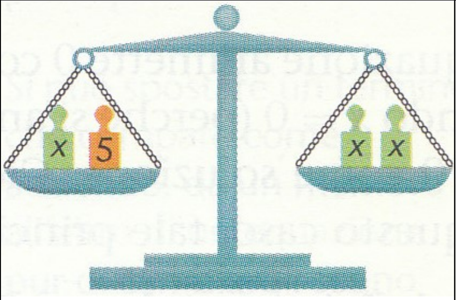
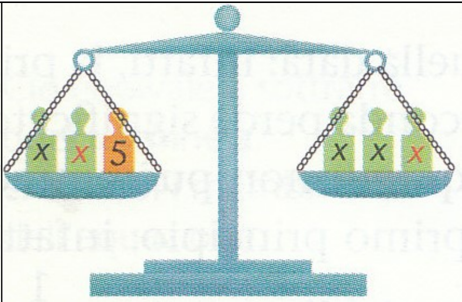
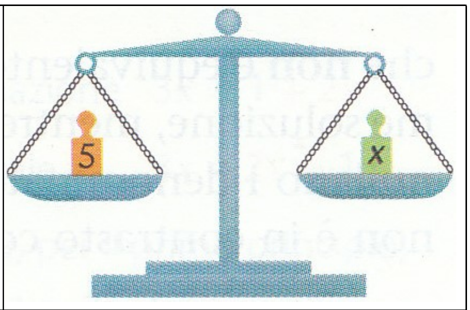
Equazioni equivalenti
Le due equazioni x-2=0 e 5x-10=0 hanno entrambe come insieme delle soluzioni S= {2}.
Due equazioni nelle stesse incognite si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.
Presentiamo ora delle regole che permettono di trasformare una data equazione in un'altra equazione, equivalente a quella originaria.
Queste regole ci saranno utili, successivamente, per risolvere le equazioni.

Il primo principio di equivalenza

Consideriamo l'equazione:

x+5=2x

Osserva la seguente classica interpretazione dell'equazione:

		
Possiamo interpretare l'equazione rifacendoci all'immagine di una bilancia avente su un piatto un peso di x grammi più uno di 5 grammi e sull'altro due pesi di x grammi: dal momento che c'è uguaglianza tra i pesi dei due piatti, dobbiamo pensare la bilancia in *equilibrio*.	Se aggiungiamo un peso di x grammi a un piatto, per mantenere l'equilibrio dobbiamo aggiungerlo anche all'altro. Formalmente: $x + 5 + x = 2x + x$	Se togliamo un peso di x grammi da un piatto, per mantenere l'equilibrio dobbiamo toglierlo anche dall'altro. Formalmente: $x + 5x - x = 2x - x$

Questa interpretazione suggerisce che, come in una bilancia non si altera l'equilibrio togliendo o aggiungendo lo stesso peso ai due piatti, così, togliendo o aggiungendo una stessa "quantità" a entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.
Questo è sostanzialmente il contenuto del primo principio di equivalenza.

Enunciato: Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione un numero o una espressione algebrica definita per tutti i valori delle variabili che vi compaiono, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

ESEMPI:

a. Aggiungendo a entrambi i membri dell'equazione

$$x = x^2$$

il numero 2, otteniamo l'equazione equivalente

$$x + 2 = x^2 + 2$$

b. Sottraendo a entrambi i membri dell'equazione $x = x^2$ l'espressione $\frac{1}{2}x$ (che, nota, è definita per ogni valore reale di x) otteniamo l'equazione equivalente

$$x - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x$$

Quando si vuole applicare il primo principio di equivalenza, è essenziale controllare che l'espressione che si aggiunge (o si toglie) sia sempre definita.

CONTROESEMPIO - Necessità delle ipotesi del primo principio

Aggiungendo a entrambi i membri dell'equazione:
$x = x^2$
l'espressione $\frac{1}{x}$, otteniamo l'equazione:

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

che non è equivalente a quella data: infatti, la prima equazione ammette come soluzione 0, mentre la seconda perde significato quando x = 0 (perché si annullano i denominatori), quindi non può ammettere 0 come soluzione.

Ciò non è in contrasto con il primo principio: infatti, in questo caso, tale principio non si può applicare, perché l'espressione $\frac{1}{x}$ **non** è definita quando x = 0.

Il secondo principio di equivalenza

Abbiamo visto che aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione una stessa “quantità" si ottiene un'equazione equivalente.
Se invece di addizionare o sottrarre una stessa quantità moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri di un'equazione per una stessa quantità, otteniamo ancora un'equazione equivalente?

La risposta è affermativa, purché la quantità per cui si moltiplica o si divide sia sempre diversa da zero.

Enunciato: Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica definita e non nulla per tutti i valori delle variabili che vi compaiono, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

ESEMPI

a. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione x + 2 = x per il numero 3, otteniamo l'equazione equivalente 3x + 6 = 3x.
b. Dividendo entrambi i membri dell'equazione 10x + 30 = 100 per il numero 10, otteniamo l'equazione equivalente x + 3 = 10.

Quando si vuole applicare il secondo principio di equivalenza, è essenziale controllare che l’espressione per cui si moltiplica (o si divide) sia sempre definita e non si annulli mai.

CONTROESEMPIO - Necessità delle ipotesi del secondo principio

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione $x = x^2$ per l'espressione $x - 2$ otteniamo l'equazione $x(x-2) = x^2(x-2)$ che non è equivalente a quella data: puoi verificare che la seconda equazione ammette 2 come soluzione, mentre 2 non è una soluzione della prima equazione.
Ciò non è in contrasto con il secondo principio: infatti, in questo caso, tale principio non si può applicare, perché l’espressione $x - 2$ si annulla quando $x = 2$.

Conseguenze dei principi di equivalenza

Conseguenze del 1° principio	Giustificazione	Esempio
Si può spostare un termine, che compare come addendo, da un membro all'altro di un'equazione pur di cambiargli segno (regola del trasporto).	Ciò equivale a sottrarre quel termine a entrambi i membri dell'equazione.	L'equazione $3x = 1 + 2x$ equivale a: $3x - 2x = 1$ Infatti, per il primo principio, $3x = 1 + 2x$ equivale a: $3x - 2x = 1 + 2x - 2x$ ossia a: $3x - 2x = 1$
Se un certo termine compare come addendo sia in uno sia nell'altro membro di una equazione, può essere soppresso.	Ciò equivale a sottrarre quel termine da entrambi i membri dell'equazione.	$x^2 + 3x = 7 + 3x$ equivale, sopprimendo $+3x$, a: $x^2 = 7$
Conseguenze del 2° principio	**Giustificazione**	**Esempio**
Se tutti i termini di un'equazione hanno in comune un fattore non nullo, si possono dividere i due membri per quel fattore.	È una diretta applicazione del secondo principio.	$4x + 6 = 12$ è equivalente, dividendo tutti i termini per 2, all'equazione: $2x + 3 = 6$
Si possono cambiare i segni di tutti i termini di un'equazione.	Ciò equivale a moltiplicare entrambi i membri per —1.	$x^2 - 6x + 5 = 0$ è equivalente a $-x^2 + 6x - 5 = 0$
Si può trasformare un'equazione a coefficienti frazionari in una equivalente a coefficienti interi.	Basta moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo dei denominatori dell'equazione.	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 4$ m.c.m.(2,3) = 6 è equivalente a: $6(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x) = 6 \cdot 4$ ossia a: $3x + 2x = 24$

Il grado di un'equazione

Utilizzando la regola del trasporto, si possono sempre spostare tutti i termini di un'equazione al primo membro. Ogni equazione nell'incognita x si può perciò sempre scrivere nella forma:

A(x) = 0

Se A(x) è un polinomio, una volta scritto A(x) in forma normale (cioè una volta ridotti gli eventuali termini simili), si ottiene la cosiddetta forma normale (o forma canonica) dell'equazione.

Enunciato: Data un'equazione nell'incognita x, si dice grado dell'equazione il grado del polinomio A(x), una volta che l'equazione sia stata scritta nella forma normale A(x) = 0.

ESEMPI

Stabiliamo il grado delle seguenti equazioni:

a. $x^2 + 2x + 1 = 0$ b. $2x + 1 = 0$ $(x + 1)^2 = x^2 + 2$

a. L'equazione $x^2 + 2x + 1 = 0$ è in forma normale ed è di secondo grado.

b. L'equazione $2x + 1 = 0$ è in forma normale ed è di primo grado.

c. A differenza del due esempi precedenti, l'equazione non è in forma normale.

Per determinare il grado dell'equazione, dobbiamo prima riscriverla in tale forma.

Sviluppando il quadrato, l'equazione diventa: $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2$

Portando tutti i termini al primo membro abbiamo l'equazione:
$x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2 = 0$

e infine, riducendo i termini simili, otteniamo la forma normale dell'equazione: $2x - 1 = 0$.

Vediamo così che l'equazione è di primo grado.

❖ **Prova tu**
Vero o falso?

	V	F
L'equazione $x + 3 = x^2 + 9$ è equivalente a $x = x^2 + 6$	☐	☐
L'equazione $x + 1 = 3$ è equivalente a $2x + 2 = 6$	☐	☐
L'equazione $10x^2 + 5x = 15$ è equivalente a $2x^2 + x = 3$	☐	☐
L'equazione $-x^2 + 2x + 3 = -4$ è equivalente a $x^2 - 2x - 3 = 4$	☐	☐
L'equazione $-x^2 + 2x + 3 = -4$ è equivalente a $-x^2 + 3 = -4 + 2x$	☐	☐
L'equazione $-x^2 + 2x + 3 = -4$ è equivalente a $2x + 3 = x^2 - 4$	☐	☐
L'equazione $2x + 3 = x + 1$ è equivalente a $x(2x + 3) = x(x + 1)$	☐	☐
L'equazione $x^2 - 4 = x + 2$ è equivalente a $x^2 - 4 + \frac{1}{x+2} = x + 2 + \frac{1}{x+2}$	☐	☐
L'equazione $2x^3 + x^2 + 5x - 6 = x^2 + x - 6$ è equivalente a $2x^3 + 5x = x$	☐	☐

❖ Scrivi un'equazione, avente coefficienti interi, equivalente alla seguente:

$$\frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{15}x$$

❖ Scrivi l'equazione $x^2 - 3x + 5 = -x^2 + 5x - 9$ in forma normale e determinane il grado.

3. Equazioni intere di primo grado

Procedimento per risolvere un'equazione di primo grado intera.

Le più semplici equazioni di primo grado nell'incognita x che si possono presentare sono quelle della forma:

ax =b dove a e b sono numeri reali, con a≠0. Per esempio:

3x=-2   2x=7   -x=+3

Le equazioni di questo tipo si risolvono immediatamente: basta dividere i due membri dell'equazione per il coefficiente di x (secondo principio di equivalenza);
per esempio:

3x= -2   equivale a $\frac{3x}{3}=\frac{-2}{3}$, da cui $x=-\frac{2}{3}$

2x=1   equivale a $\frac{2x}{2}=\frac{1}{2}$, da cui $x=\frac{1}{2}$

-x=+3   equivale a $\frac{-x}{-1}=\frac{+3}{-1}$, da cui $x=-3$

Per risolvere una generica equazione intera di primo grado basta ricondursi, mediante i principi di equivalenza e le regole del calcolo algebrico, a un'equazione del tipo ax = b e risolvere l'equazione che si è così ottenuta.

Esaminiamo inizialmente equazioni che si riconducono a equazioni del tipo ax= b, con $a \neq 0$.

ESEMPIO

Equazione a coefficienti interi

Risolviamo l'equazione:

$2x-(3x+4)=4x-(x-6)$

Procediamo scrivendo la seguente catena di equazioni equivalenti.

$2x-(3x+4)=4x-(x-6)$	Equazione da risolvere
$2x-3x-4=4x-x+6$	Abbiamo tolto le parentesi
$2x-3x-4x+x=+6+4$	Abbiamo portato tutti i termini in x al primo membro e tutti i termini numerici al secondo (1° principio)
$-4x=+10$	Riducendo i termini simili
$\frac{-4x}{-4}=\frac{+10}{-4}$	Dividendo entrambi i membri per -4 (2° principio)
$x=\frac{+10}{-4}=-\frac{5}{2}$	Semplificando

Pertanto, l'equazione è determinata e il suo insieme delle soluzioni è: $S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

In generale, le equazioni di primo grado a coefficienti interi si risolvono eseguendo passaggi analoghi a quelli illustrati nel precedente esempio.

Le equazioni di primo grado a coefficienti frazionari, come abbiamo già osservato discutendo i principi di equivalenza, si possono ricondurre a equazioni a coefficienti interi: basta moltiplicare entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori che compaiono nell'equazione.

Risolviamo l'equazione: $\frac{1}{2}x+\frac{x-1}{3}=2-\frac{x-1}{12}$

$\frac{1}{2}x+\frac{x-1}{3}=2-\frac{x-1}{12}$	Il m.c.m. dei denominatori è 12
$12\left(\frac{1}{2}x+\frac{x-1}{3}\right)=12\left(2-\frac{x-1}{12}\right)$	Moltiplicando entrambi i membri per 12, otterremo un'equazione equivalente a coefficienti interi
$12\cdot\frac{1}{2}x+12\cdot\frac{x-1}{3}=12\cdot 2-12\cdot\frac{x-1}{12}$	Proprietà distributiva
$6x+4(x-1)=24-(x-1)$	Attenzione alle parentesi tonde introdotte: sono essenziali!
$6x+4x-4=24-x+1$	Svolgendo i calcoli
$6x+4x+x=24+1+4$	Portando tutti i termini con la x al primo membro e quelli numerici al secondo.
$11x=29$	Riducendo i termini simili
$x=\frac{29}{11}$	Dividendo entrambi i membri per 11 (2° principio)

Pertanto l'equazione è determinata e il suo insieme delle soluzioni è $S=\left\{\frac{29}{11}\right\}$

Verifica delle soluzioni

Una volta che si è risolta un'equazione, si può effettuare la verifica delle soluzioni, cioè controllare che le soluzioni trovate siano effettivamente corrette.

Per fare ciò basta sostituire nell'equazione iniziale al posto dell'incognita il numero trovato come soluzione e controllare che questo numero renda effettivamente uguali i due membri dell'equazione.

In uno degli esempi precedenti abbiamo trovato che l'equazione:

$$2x-(3x+4)=4x-(x-6)$$

ha come soluzione:

$$x=-\frac{5}{2}$$

VERIFICA

$$2x-(3x+4)=4x-(x-6)$$

$$2\left(-\frac{5}{2}\right)-\left[3\left(-\frac{5}{2}\right)+4\right]\overset{?}{=}4\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}-6\right)$$

$-5+\frac{15}{2}-4$ $\qquad\qquad$ $-10+\frac{5}{2}+6$

$-\frac{3}{2}$ $\qquad\qquad$ $-\frac{3}{2}$

I due membri assumono lo stesso valore quando $x=-\frac{5}{2}$, quindi $-\frac{5}{2}$ è una soluzione corretta.

Equazioni impossibili o indeterminate

Negli esempi precedenti siamo giunti a equazioni del tipo:

ax=b

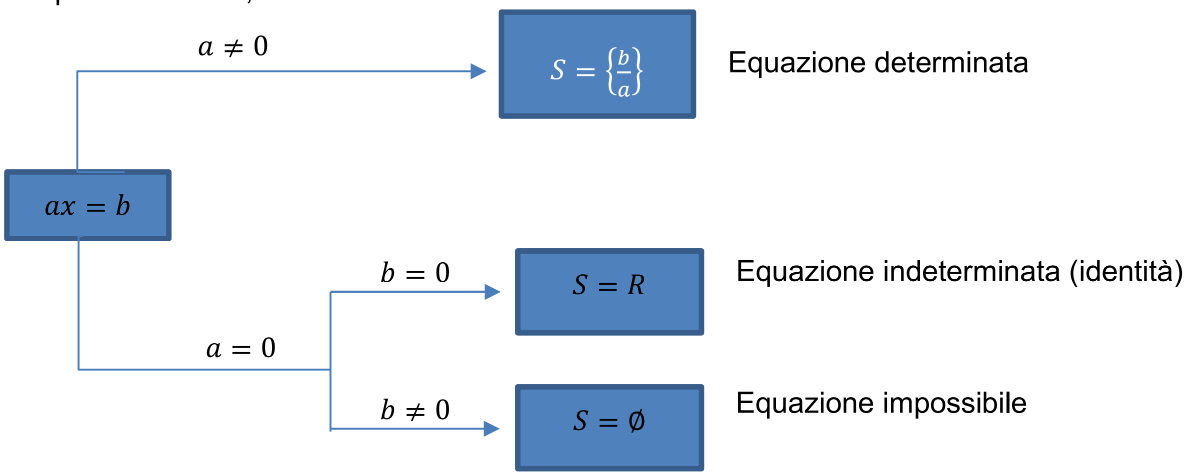
con a numero reale diverso da zero. Essendo $a \neq 0$, abbiamo potuto applicare il secondo principio di equivalenza e dividere entrambi i membri per *a*; abbiamo così ottenuto: $x=\frac{b}{a}$.

Può tuttavia capitare che si giunga a un'equazione del tipo 0x=b; un'equazione, cioè, in cui a= 0.
Che cosa accade in questo caso?

Se b = 0, l'equazione assume la forma 0x=0 ed è verificata per ogni x $\in$ R, perché qualsiasi numero reale, moltiplicato per 0, dà come risultato 0 (0 è elemento assorbente rispetto alla moltiplicazione). L'equazione è indeterminata: precisamente, è un'identità.

Se $b \neq 0$, l'equazione 0x=b non è verificata per alcun valore di x, perché nessun numero reale, moltiplicato per 0, dà come risultato un numero diverso da zero (sempre perché 0 è elemento assorbente rispetto alla moltiplicazione).
L'equazione è impossibile: l'insieme delle soluzioni dell'equazione è vuoto.

Riassumiamo nel seguente diagramma ad albero i vari casi che si possono presentare nella risoluzione dell'equazione ax= b,



ESEMPI

Risolviamo le equazioni:

a. $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4x + 1$
b. $(x+1)(x-1) = (x-1)^2 + 2x - 2$

a. Svolgendo i quadrati l'equazione si riscrive nella forma:
$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 4x + 1$

ossia, portando tutti i termini con la x al primo membro e quelli numerici al secondo:

$2x + 2x - 4x = +1 + 1 - 1$

da cui:

$0 \cdot x = 1$

Questa equazione non ha soluzioni perché nessun numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 1, quindi l'equazione è impossibile; l'insieme delle soluzioni è:

$S = \emptyset$

b. Svolgendo i prodotti notevoli l'equazione si riscrive nella forma:
$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2$
ossia, portando tutti i termini con la x al primo membro e quelli numerici al secondo:
$2x - 2x = 1 - 2 + 1$

$0 \cdot x = 0$

Questa equazione è verificata da ogni numero reale perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 0, quindi l'insieme delle soluzioni è S = R: l'equazione è un'*identità*.

$S = \mathbf{R}$

Per concludere
Riepilogando, il procedimento da seguire per risolvere un'equazione intera di primo grado è il seguente.
1° passo: Se l'equazione è a coefficienti frazionari si moltiplicano entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori, in modo da ricondursi a un'equazione a coefficienti interi.

2° passo: Si svolgono gli eventuali calcoli ai due membri dell'equazione, togliendo tutte le parentesi.

3° passo: Si trasportano tutti i termini con la x al primo membro e tutti i termini numerici al secondo.

4° passo: Si risolve l'equazione del tipo ax=b cui ci si è ricondotti nel passo precedente.

La tabella qui sotto riassume le soluzioni che un'equazione di primo grado può presentare.

Equazione che si ottiene dopo avere ricondotto l'equazione alla forma ax=b	Tipo di equazione	Numero di soluzioni	Insieme delle soluzioni
ax=b, con a≠0	Determinata	Una sola	$S=\left\{\frac{b}{a}\right\}$
0x=0	Indeterminata	Infinite	S=R
0x=b, con $b\neq 0$	Impossibile	Nessuna	$S=\emptyset$

ESERCIZI

$\frac{1}{2}x-\frac{x+2}{3}=x-\frac{1}{6}$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$

$\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}=\frac{1}{2}x-2-\frac{x+2}{3}$ [indeterminata]

$(x-1)^2=(x+1)^2$ [0]

$(x+1)^2=2(x+3)+(x-1)(x+1)$ [impossibile]

4. Problemi che hanno come modello un'equazione di primo grado

Ora abbiamo a disposizione un nuovo e potente modello matematico per affrontare i problemi: le equazioni. Per esempio, consideriamo il seguente classico quesito:
"Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone; quanto pesa il mattone?"
Invece di procedere per tentativi, possiamo risolvere facilmente l'indovinello in questo modo: indichiamo con l'incognita x il peso, in kg, del mattone e traduciamo l'informazione espressa dal problema in un'equazione:

$$\underbrace{\text{Il peso del mattone}}_{x}\quad\underbrace{\text{è uguale a}}_{=}\quad\underbrace{\text{1 kg}}_{1}\quad\underbrace{\text{più}}_{+}\quad\underbrace{\text{mezzo mattone}}_{\frac{1}{2}x}$$

Risolvendo l'equazione $x=1+\frac{1}{2}x$, si trova che x = 2; quindi possiamo concludere che il mattone pesa 2 kg.

Schema logico per la risoluzione di un problema, utilizzando come modello un'equazione

1. Familiarizzazione con il problema - Si tratta di leggere attentamente il testo del problema e individuare i dati e l'obiettivo.
2. Costruzione del modello algebrico - Questa è la fase più delicata. Si articola nelle seguenti tre sottofasi:
   a. scegliere, fra gli elementi non noti, uno da indicare come incognita (la scelta dell'incognita, in generale, non è unica: uno stesso problema può essere risolto in modi diversi, a seconda dell'incognita fissata, e una scelta opportuna può semplificare i calcoli);
   b. individuare il dominio dell'incognita (per esempio, se indichiamo con x la misura di un segmento, dovrà essere x > 0);
   c. costruire l'equazione che costituisce il modello del problema (a seconda della scelta dell'incognita, si possono trovare equazioni differenti).
3. Risoluzione dell'equazione
4. Verifica dell'accettabilità della soluzione e risposta

Si articola nelle seguenti due sottofasi:

a. stabilire se la soluzione dell'equazione è accettabile anche come soluzione del problema (per esempio, se indichiamo con x la misura di un segmento, dovrà essere x > 0: quindi se, risolvendo l'equazione, si trovasse una soluzione negativa, questa sarebbe da scartare perché non avrebbe senso in relazione al problema);

b. concludere, scrivendo la risposta.

ESEMPI

❖ Un televisore, dopo che è stato praticato uno sconto del 12% sul prezzo originario, è stato pagato 308 euro. Qual era il prezzo originario del televisore?

Familiarizziamo con il problema

Dati

- *Sconto subito dal prezzo del televisore 12 %*
- *Prezzo scontato 308 euro*

Obiettivo

- *Il prezzo originario del televisore*

Costruiamo il modello algebrico del problema

- Indichiamo con l'incognita x il prezzo originario del televisore (che è il nostro obiettivo).
- Osserviamo che deve essere x > 308 (poiché il prezzo originario deve essere maggiore del prezzo scontato).
- Per determinare x, impostiamo un'equazione che tiene conto dei dati.

L'equazione è la seguente.

$$\underbrace{x}_{\text{Il prezzo originario}} \quad \underbrace{-}_{\text{meno}} \quad \underbrace{\frac{12}{100}}_{\text{il 12\%}} \quad \underbrace{\cdot}_{\text{del}} \quad \underbrace{x}_{\text{prezzo originario}} \quad \underbrace{=}_{\text{è uguale al}} \quad \underbrace{308}_{\text{prezzo scontato}}$$

Ossia:

$x - \frac{3}{25}x = 308$ osserva che $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

Risolviamo l'equazione

$$x-\frac{3}{25}x=308$$

25x-3x=308·25 Moltiplicando entrambi i membri per 25

22x=308·25

$$x=\frac{308\cdot 25}{22}=350$$

Verifichiamo l'accettabilità della soluzione e rispondiamo

La soluzione trovata è accettabile (infatti è maggiore di 308).
Concludiamo che il prezzo originario del televisore era di 350 euro.

❖ Determinare tre numeri naturali consecutivi la cui somma sia uguale a 45.

Familiarizziamo con il problema

Dati

- *Somma di tre numeri naturali consecutivi* 45

Obiettivo

- *Trovare i tre numeri*

Costruiamo il modello algebrico del problema

In questo problema le incognite sono apparentemente tre, ma se indichiamo con x uno dei tre numeri, possiamo esprimere gli altri due in funzione di x (perché sappiamo che i tre numeri sono consecutivi): quindi basta una sola incognita per formalizzare il problema.
La scelta di quale dei tre numeri indicare con x è arbitraria.
Per far vedere, a titolo d'esempio, le analogie e le differenze nel risolvere un problema con incognite diverse, ti proponiamo, in parallelo, sia la risoluzione scegliendo come incognita il numero minore, sia quella scegliendo come incognita il numero intermedio; invitiamo te a risolvere il problema scegliendo come incognita il numero maggiore.

Indicando con x il numero minore	**Indicando con x il numero intermedio**
- Se x è il numero minore, gli altri due sono x+1 e x+2. - L'incognita x varia nell'insieme dei numeri naturali. - Il fatto che la somma dei tre numeri consecutivi sia uguale a 45 si traduce nell'equazione: x+(x+1)+(x+2)=45	- Se x è il numero intermedio, gli altri due sono x-1 e x+1. - L'incognita x varia nell'insieme dei numeri naturali diversi da zero. - Il fatto che la somma dei tre numeri consecutivi sia uguale a 45 si traduce nell'equazione: (x-1)+x+(x+1)=45

Risolviamo l'equazione

Indicando con x il numero minore
x+(x+1)+(x+2) = 45
3x+3 = 45
3x = 42
x =14

Indicando con x il numero intermedio
(x-1)+x+(x+1) = 45
3x = 45
x = 15

Verifichiamo l'accettabilità delle soluzioni e rispondiamo

Indicando con x il numero minore
- La soluzione dell'equazione trovata, x =14, è un numero naturale, quindi è una soluzione accettabile in relazione al problema.
- Dal momento che il minore fra i tre numeri naturali cercati è 14, deduciamo che gli altri due sono 15 e 16. La conclusione è che i tre numeri naturali richiesti sono 14. 15 e 16.

Indicando con x il numero intermedio
- La soluzione dell'equazione trovata, x = 15, è un numero naturale diverso da zero, quindi è una soluzione accettabile in relazione al problema.
- Dal momento che il numero intermedio fra i tre numeri naturali cercati è 15, gli altri due sono 14 e 16. La conclusione è che i tre numeri naturali richiesti sono 14, 15 e 16.

❖ Si vuole formare la somma di 5 euro con 40 monete, alcune da 20 centesimi e altre da 50 centesimi. Quante monete da 20 e quante da 50 centesimi sono necessarie?

Familiarizziamo con il problema
Dati
- *Abbiamo a disposizione monete da 20 e da 50 centesimi*
- *Dobbiamo utilizzare complessivamente 40 monete*

Obiettivo
- *Trovare il numero di monete da 20 centesimi e il numero di monete da 50 centesimi, che diano luogo a una somma complessiva di 5 euro*

Costruiamo il modello algebrico del problema
- Indichiamo con x il numero di monete da 20 centesimi necessarie: così resta automaticamente determinato, in funzione di x, il numero di monete da 50 centesimi, che sarà uguale a 40 - x, dal momento che si vogliono utilizzare in tutto 40 monete.
- Qual è il dominio di x? Il numero x deve essere un numero naturale, minore o uguale a 40 che è il numero di monete che si vogliono utilizzare in totale: quindi deve essere $0 \leq x \leq 40$, con $x \in N$ (abbiamo incluso anche gli estremi, x=0 e x=40, che corrispondono ai casi in cui si utilizzano solo monete da 50 centesimi o solo monete da 20 centesimi, perché, a priori, nulla vieta questi casi).
- Per scrivere l'equazione ci aiutiamo con la seguente tabella.

Numero di monete	Tipo di monete	Valore delle monete (in euro)
x	20 centesimi	$\frac{20}{100}x = \frac{1}{5}x$
40-x	50 centesimi	$\frac{50}{100}(40 - x) = \frac{1}{2}(40 - x)$

Per ottenere una somma complessiva di 5 euro, x dovrà soddisfare l'equazione:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}(40 - x) = 5$$

Risolviamo l'equazione

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}(40 - x) = 5$$

$2x + 5(40 - x) = 50$ Moltiplicando i due membri dell’equazione per 10

$2x + 200 - 5x = 50$

$-3x = -150$

$$x = \frac{-150}{-3} = 50$$

Verifichiamo l’accettabilità delle soluzioni e rispondiamo

- La soluzione trovata è un numero naturale, ma non soddisfa la condizione $0 \leq x \leq 40$, perciò non è accettabile in relazione al problema proposto.
- Dobbiamo concludere che è impossibile formare la somma di 5 euro utilizzando 40 monete, alcune da 20 e altre da 50 centesimi.

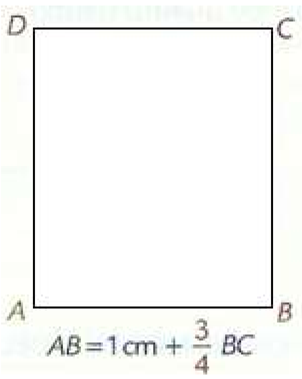
❖ In un rettangolo ABCD la lunghezza di AB supera di 1 cm i $\frac{3}{4}$ della lunghezza di BC. Il perimetro del rettangolo è 37 cm. Qual è l'area del rettangolo?

Familiarizziamo con il problema
Dati

- $\mathrm{AB} = 1\ \mathrm{cm} + \frac{3}{4}\mathrm{BC}$
- Perimetro (ABCD)= 37 cm

Obiettivo

- Area (ABCD)



Costruiamo il modello algebrico del problema
Indichiamo con l'incognita x la misura di BC, ossia poniamo: $\overline{BC} = x$
Osserviamo che dovrà essere x > 0, rappresentando x la misura di un segmento.

In base ai dati possiamo esprimere la misura di AB in funzione di x: $\overline{AB} = 1 + \frac{3}{4}x$

Per determinare x, imponiamo che il perimetro di ABCD sia 37 cm, ottenendo così la seguente equazione:

$$2\underbrace{\left(1+\frac{3}{4}x\right)}_{\overline{AB}} + 2\cdot\underbrace{x}_{\overline{BC}} = \underbrace{37}_{\text{misura del perimetro di } ABCD}$$

Risolviamo l'equazione

$2\left(1+\frac{3}{4}x\right) + 2x = 37$

$2 + \frac{3}{2}x + 2x = 37$ Eseguendo la moltiplicazione al 1° membro

$4 + 3x + 4x = 74$ Moltiplicando i due membri per 2

$7x = 70 \implies x = 10$

Verifichiamo l'accettabilità della soluzione e rispondiamo

- La soluzione trovata è accettabile (infatti è positiva). Dunque:

$\overline{BC} = 10 \;\; e \;\; \overline{AB} = 1 + \frac{3}{4} \times 10 = 8{,}5$

- Possiamo ora concludere calcolando l'area del rettangolo:

$Area(ABCD) = 10 \cdot 8{,}5\ cm^2 = 85\ cm^2$

❖ **Due auto in autostrada**

Un'auto, su un'autostrada, parte da un casello A verso il casello B che dista 200 km da A; dopo 20 minuti, dal casello B parte una seconda auto che si muove in verso opposto al precedente (cioè verso il casello A).

Le due auto viaggiano a una velocità che si può considerare mediamente costante e uguale a 110 km all'ora per la prima auto e 90 km all'ora per la seconda.

Dopo quanto tempo dalla sua partenza la prima auto incontrerà la seconda?

Formalizziamo con il problema

Dati

- *L'auto che parte da A viaggia a 110 km/h*
- *L'auto che parte da B viaggia a 90 km/h e pafie 20 minuti dopo l'auto che parte da A*
- *La distanza tra i caselli A e B è di 200 km*

Obiettivo

- *Dopo quanto tempo dalla partenza dell'auto da A le due auto si incontrano*

Costruiamo il modello del problema

- Indichiamo con t il tempo incognito, espresso in ore, trascorso dal momento della partenza della prima auto all'istante in cui le due auto si incontrano.
- Dovrà essere $t \geq \frac{1}{3}$, perché la seconda auto parte 20 minuti dopo la prima, cioè dopo un terzo di ora.
- Per impostare un'equazione, aiutiamoci costruendo una tabella in cui esprimiamo, in funzione di t, gli spazi percorsi dalle due auto dalla partenza al momento d'incontro.

Auto	Velocità (in km/h)	Tempo di viaggio Dalla partenza Al momento d'incontro (in ore)	Spazio percorso [spazio=velocità×tempo]
Auto partita dal casello A	110	t	110 t
Auto partita dal casello B	90	$t-\frac{1}{3}$ **Ricorda che la seconda auto è partita 20 minuti dopo la prima.**	$90 \cdot \left(t-\frac{1}{3}\right)$

Nell'istante in cui le due auto si incontrano, la somma degli spazi percorsi deve uguagliare la distanza tra i due caselli; quindi deve essere:

$$110t + 90\left(t-\frac{1}{3}\right) = 200$$

Risolviamo l'equazione

$$110t + 90\left(t-\frac{1}{3}\right) = 200$$

$$110t + 90t - 30 = 200$$

$$200t = 230$$

$$t = \frac{230}{200} = \frac{23}{20}$$

Verifichiamo l'accettabilità della soluzione e rispondiamo

- La soluzione è accettabile $\left(t \geq \frac{1}{3}\right)$
- Dal momento che abbiamo misurato il tempo t in ore, possiamo concludere che le auto si incontrano dopo un tempo uguale a:

$$\frac{23}{20} \cdot 60 \text{ minuti} = 69 \text{ minuti, ossia dopo 1 ora e 9 minuti.}$$

ESERCIZI

Risolvere le seguenti equazioni

$2x - 3 = 5x - 2$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

$3x - 2 = -x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

$-2(x-1) + 3(4-x) = 2(x-3) - 5(2x+1)$ $\left[-\frac{25}{3}\right]$

$5x - 7x = 8x - 1$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

$5x-1=-(1-2x)$ [0]

$2\cdot(x-2)^2-3\cdot(x-1)^2-(1-x)\cdot(x-3)=0$ $[\frac{4}{3}]$

$6x-(1-5x)\cdot(x+2)=(3x+2)^2-(2x-3)^2$ $[\frac{1}{3}]$

$(5x+9)^2=9\cdot(x+3)^2+16\cdot(x+1)^2$ $[4]$

$(2x+3)^2-2x\cdot(x+1)=x\cdot(2x+8)-3$ $[-6]$

$(5x-1)\cdot(2x+1)-(9x^2-4)=(x-1)^2-13$ $[-3]$

$3\cdot(x^2+7x)-2\cdot(2x^2-3x)=-(x-1)^2-4$ $[-\frac{1}{5}]$

$x^2-9+(2x+3)^2=5x^2+7\cdot(x-5)$ $[-7]$

$(3x-8)\cdot(x+2)-(x-2)^2=2\cdot(x^2-3x+22)$ $[8]$

$2-3[x-2(x+1)]=x-[2-(x-3)]$ $[-13]$

$-2[2(x-3)-x]+3[-2(1-x)-4x]=8x$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

$(x-1)^2-2(x+1)(x-1)=(x+2)^2-2x(x-3)$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

$(x-1)(x+2)-x(x+3)=(x-2)(x+2)-(x-1)^2$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

$(x+2)^3-(x+1)^3=(2x-1)(2x+1)-x^2$ $\left[-\frac{8}{9}\right]$

$\frac{3}{2}x+1=x-\frac{1}{4}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{15}=\frac{1}{5}x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

$\frac{x-1}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{15}$ $\left[\frac{22}{3}\right]$

$\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{3}{4}\right)=\frac{x-1}{2}$ [1]

$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(3x-6)=\frac{1}{4}(2x-8)$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{x+2}{3}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1-x}{6}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}(3-2x)\right]=\frac{x-2}{4}-\frac{1}{3}(3x-2)$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

$1-\frac{1}{2}\left[3-\frac{1}{3}(x-4)\right]=\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(3-x)$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

Risolvere i seguenti problemi con l'uso delle equazioni di primo grado

- Un padre ha 38 anni e il figlio ne ha 14. Dopo quanti anni l'età del padre sarà il doppio di quella del figlio? *[10]*

- La somma tra il doppio di un numero e il triplo del numero stesso è 20. Qual è il numero. [4]

- Trovare due numeri naturali consecutivi sapendo che la loro somma è 49. [24; 25]

- Determinare le lunghezze dei tre lati di un triangolo ABC, sapendo che BC supera AC di 4 cm, AC è il doppio di AB e il perimetro di ABC è 34 cm. *[AB= 6 cm; BC= 16 cm; AC =12 cm]*

- Determinare le ampiezze dei tre angoli di un triangolo ABC, sapendo che $\hat{C}$ è il doppio di $\widehat{A}$ e $\hat{B}$ supera $\hat{C}$ di 55°. . $[\widehat{A} = 25°;\ \hat{B} = 105°;\ \hat{C} = 50°]$

- Bisogna ripartire la somma di 2000 euro fra tre persone, in modo che la prima abbia 100 euro più della seconda e la seconda 200 euro più della terza. Trovare le tre somme. [500 €; 700 €; 800 €]

- Un appartamento viene pagato in tre rate. Nella prima rata si paga il 15% del prezzo totale, nella seconda il 50% di ciò che rimane da pagare e nella terza si versano 34 000 euro. Qual era il prezzo dell'appartamento? *[80 000 euro]*

- In un parcheggio ci sono moto e automobili. Sapendo che le ruote sono 240 e che in tutto ci sono 66 veicoli, calcola il numero delle moto e quello delle auto. *[54 auto e 12 moto]*

- Suddividere un insieme di 55 persone in tre gruppi, in modo che nel secondo gruppo ci siano 5 persone in più che nel primo e nel terzo gruppo ci siano il doppio delle persone che ci sono nel secondo. *[I gruppi devono essere costituiti di 10, 15 e 30 persone]*

- Una compagnia telefonica fa pagare un canone mensile di 10 euro e 8 centesimi per ogni minuto di conversazione. Un'altra compagnia fa pagare un canone mensile di 15 euro, e 6 centesimi per ogni minuto di conversazione. Quanti minuti si dovrebbe conversare in un mese, per pagare la stessa cifra sia con l'una che con l'altra compagnia? *[250]*

- Luca e Paolo possiedono, rispettivamente, 120 e 80 euro. Luca spende 15 euro al giorno e Paolo 10 euro al giorno; dopo quanti giorni avranno la stessa somma? *[8]*

- Viene acquistato un appartamento pagandolo in 3 rate. Nella prima rata si paga il 20%, nella seconda il 50% di quello che resta da pagare e nella terza si versa la somma di 31000 euro. Quanto costa l'appartamento? *[77500 €]*

- Un'auto, su un'autostrada, parte da un casello A a un certo istante, verso il casello B che dista 280 km dal casello A; dopo 10 minuti, dal casello B parte una seconda auto che si muove in verso opposto al precedente (cioè verso il casello A). Le due auto viaggiano ad una velocità che si può considerare mediamente costante e uguale a 130 km all'ora per la prima auto e di 120 km all'ora per la seconda; dopo quanto tempo dalla sua partenza la prima auto incontrerà la seconda? *[Dopo 1 ora e 12 minuti]*

MAPPA DI SINTESI