



Ministero Dell'Istruzione

CENTRO PROVINCIALE ISTRUZIONE ADULTI DI UDINE
UDINE - CIVIDALE DEL FRIULI – CODROIPO – GEMONA DEL FRIULI - SAN GIORGIO DI N. – TOLMEZZO

Via Diaz n° 60 – 33100 UDINE (UD) – telefono 0432500634

Codice fiscale 94134770307 - Codice Scuola – UDMM098007

e-mail: UDMM098007@istruzione.gov.it Posta certificata: - UDMM098007@pec.istruzione.it

Sito web www.cpiaudine.edu.it



Secondo periodo didattico	Asse matematico-scientifico-tecnologico Matematica
COMPETENZA N. 1	Uda: ARITMETICA E ALGEBRA
Argomento: I sistemi	Ore Fad:

ANNO SCOLASTICO 2021/2022

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO



E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI



<u>TITOLO: SISTEMI LINEARI</u>	
CONTENUTI	- Definire cos'è un sistema di equazioni e illustrare i principali metodi risolutivi.
MATERIALE DIDATTICO	- Testo: studiare il contenuto del documento - Video: https://www.youtube.com/watch?v=v9eyAeUNxQ (metodo grafico) https://www.youtube.com/watch?v=rkwDJ2bh3uc (metodo di sostituzione e di addizione e sottrazione); https://www.youtube.com/watch?v=hwYL7guJphQ (metodo del confronto); https://www.youtube.com/watch?v=WzVKpl9JIOY (metodo di Cramer)
Cosa impariamo a fare	Dallo studio del testo sarà possibile definire un'equazione e classificarla e risolvere sistemi lineari in due e tre incognite.
ISTRUZIONI PER LO STUDIO A CASA Leggere il testo e svolgere gli esercizi assegnati presenti in fondo all'unità.	
VERIFICA/CONSEGNA	Inviare a COGNOME documento Google oppure COGNOME_FOTO.jpg Indica nell'OGGETTO della mail il COGNOME.

Sistemi lineari

1. Che cos'è un sistema?

Si è visto che mediante le equazioni in *una* incognita possiamo formalizzare e risolvere molti problemi. Tuttavia, nei problemi in cui gli elementi non noti, da determinare, sono *più di uno* le equazioni in una sola incognita non forniscono sempre un modello algebrico adeguato.

Per renderci conto di questo fatto, analizziamo insieme alcuni problemi.

- Problema 1

In un cinema, i biglietti ordinari vengono venduti al prezzo di 7 euro e quelli ridotti, destinati a bambini di età inferiore a otto anni, al prezzo di 5 euro. In una serata, sono stati venduti complessivamente 156 biglietti e sono stati incassati 1044 euro.

Quanti biglietti ordinari e quanti ridotti sono stati venduti?

In questo problema ci sono *due* elementi che non conosciamo: il numero di biglietti *ordinari* e il numero di biglietti *ridotti* che sono stati venduti. Tuttavia, se indichiamo con x il numero di biglietti ordinari venduti, è facile esprimere in funzione di x il numero di biglietti ridotti: sappiamo che sono stati venduti complessivamente 156 biglietti, quindi il numero di biglietti ridotti venduti è $156 - x$.

A questo punto il problema può essere risolto mediante la seguente equazione in una incognita:

$$\underbrace{7}_{\text{prezzo biglietto ordinario}} \cdot \underbrace{x}_{\text{numero di biglietti ordinari venduti}} + \underbrace{5}_{\text{prezzo biglietto ridotto}} \cdot \underbrace{(156 - x)}_{\text{numero di biglietti ridotti venduti}} = \underbrace{1044}_{\text{incasso totale}}$$

Riassumendo: questo problema presenta due incognite, ma è facile esprimere un'incognita in funzione dell'altra, quindi il problema può essere ugualmente risolto tramite un'equazione di primo grado in *una* incognita.

- Problema 2

Un test è formato da domande e problemi: Paolo risponde esattamente a 7 domande, svolge correttamente 3 problemi e ottiene 29 punti. Francesca risponde esattamente a 10 domande, svolge correttamente 2 problemi e ottiene 30 punti.

Quanti punti vale una domanda e quanti un problema?

Anche in questo problema ci sono *due* elementi che non conosciamo: il punteggio assegnato a una domanda e il punteggio assegnato a un problema. Tuttavia, in questo caso, se indichiamo con x il punteggio di una domanda, *non è facile* esprimere in funzione di x il punteggio di un problema. Ecco quindi che il modello delle equazioni *in una sola incognita non si rivela* adeguato.

È più semplice formalizzare il problema introducendo *due* incognite: indichiamo con x il punteggio di una domanda e con y il punteggio di un problema.

Osserviamo poi la seguente tabella.

Tipo di quesito	Domande	Problemi	Totale	
Punteggio per quesito	x	y		
Punteggio di Paolo	$7x$	$3y$	29	→ $7x + 3y = 29$
Punteggio di Francesca	$10x$	$2y$	30	→ $10x + 2y = 30$

Dalla seconda riga della tabella ricaviamo l'equazione che traduce la prima informazione, e cioè che il punteggio totale ottenuto da Paolo è 29 punti:

$$7x + 3y = 29$$

Dalla terza riga della tabella ricaviamo l'equazione che traduce la seconda informazione, e cioè che il punteggio totale ottenuto da Francesca è 30 punti:

$$10x + 2y = 30$$

Il modello algebrico del nostro problema diventa allora il seguente: trovare i due numeri incogniti x e y che soddisfano, contemporaneamente, le seguenti due equazioni:

$$7x + 3y = 29 \quad \text{e} \quad 10x + 2y = 30$$

Per precisare il nuovo modello algebrico scaturito, introduciamo la seguente definizione.

SISTEMA DI EQUAZIONI

Un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite che si vuole siano soddisfatte contemporaneamente si chiama sistema di equazioni.

Dunque, il problema precedente ha come modello un sistema di equazioni.

Per indicare un sistema di equazioni si usa scrivere le equazioni su righe diverse, racchiudendole con una parentesi graffa posta alla loro sinistra.

In questo caso, il problema dei punteggi delle domande e dei problemi ha come modello algebrico il sistema:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni, in due incognite: x e y che verrà risolto in seguito.

Le soluzioni di un sistema

Verranno trattati sistemi formati da due equazioni di primo grado, in due incognite, che saranno indicate generalmente con x e y .

Sistemi, cioè, costituiti da due equazioni della forma:

$$ax + by = c \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad \text{o} \quad b \neq 0$$

Una **soluzione** di un'equazione di questo tipo è una **coppia ordinata** di numeri reali che, sostituiti nell'equazione al posto di x e y , la trasformano in una uguaglianza **vera**.

I sistemi si classificano in base al numero di soluzioni che presentano.

Un sistema si dice:

- **determinato, se ha un numero finito di soluzioni;**
- **impossibile, se non ha soluzioni;**
- **indeterminato, se ha infinite soluzioni.**

Un sistema di equazioni ha generalmente un numero finito di soluzioni, a meno del caso particolare in cui il sistema sia indeterminato.

Due sistemi che hanno le stesse soluzioni si dicono equivalenti.

Sistemi interi e frazionari

Un sistema si dice intero se tutte le equazioni che lo compongono sono intere, altrimenti si dice frazionario.

ESEMPI

a. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ è intero. Né x , né y si trovano al denominatore

b. $\begin{cases} \frac{x}{y} + x = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ è frazionario. L'incognita y compare anche al denominatore

Grado di un sistema

Si dice grado di un sistema intero il prodotto dei gradi delle sue equazioni.

Un sistema di primo grado viene detto **lineare**.

Esempi:

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$	è di primo grado	Entrambe le equazioni sono di primo grado, quindi il prodotto dei gradi è $1 \times 1 = 1$
$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$	è di secondo grado	La prima equazione ha grado 1 e la seconda ha grado 2, quindi il prodotto dei gradi è $1 \times 2 = 2$
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$	è di quarto grado	Entrambe le equazioni hanno grado 2, quindi il prodotto dei gradi è $2 \times 2 = 4$
$\begin{cases} x^2 y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$	è di sesto grado	La prima equazione ha grado 3 e la seconda ha grado 2, quindi il prodotto dei gradi è $2 \times 3 = 6$

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI



STRATEGIE RISOLUTIVE

1. Il metodo di sostituzione

Ci sono vari metodi per risolvere un sistema.

Uno dei più usati e generali è il cosiddetto metodo di sostituzione: esso si può utilizzare (non solo per sistemi lineari) ogniqualvolta è facile ricavare, da una delle due equazioni del sistema, un'incognita in funzione dell'altra.

ESEMPIO

Risolvi, con il metodo di sostituzione, il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Possiamo, per esempio, esprimere y in funzione di x , risolvendo la prima equazione del sistema rispetto all'incognita y ; otteniamo così:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Ora sostituiamo $3 - 2x$ al posto di y nella seconda equazione del sistema:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2(3 - 2x) = 9 \end{cases}$$

Il punto chiave è che la sostituzione permette di ottenere un'equazione in una sola incognita, detta equazione risolvente del sistema:

$$x + 2(3 - 2x) = 9$$

Risolviendo quest'ultima equazione otteniamo il valore di x :

$$x + 2(3 - 2x) = 9 \Rightarrow x + 6 - 4x = 9 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

A questo punto, per ricavare anche il valore di y , basta sostituire -1 al posto di x nell'equazione che esprime y :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 2(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è, quindi, la coppia ordinata $(-1, 5)$

Questo esempio suggerisce il seguente procedimento per risolvere, in generale, un sistema di due equazioni in due incognite con il metodo di sostituzione.

1° passo: si risolve una delle due equazioni del sistema rispetto a un'incognita (scegliendo l'equazione e l'incognita in modo da essere condotti ai calcoli più semplici possibili);

2° passo: si sostituisce l'espressione trovata nell'altra equazione: si ottiene così un'equazione in una sola incognita, detta equazione risolvente il sistema;

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI



3° passo: si risolve l'equazione risolvente;

4° passo: si sostituisce il valore dell'incognita trovata al passo precedente nell'equazione esplicitata ricavata al 1° passo e si ricava, così, il valore dell'incognita ancora da determinare;

5° passo: si conclude scrivendo la soluzione del sistema.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

1° passo. Osservando le due equazioni del sistema si riconosce che conviene ricavare x in funzione di y dalla seconda equazione del sistema; otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

2° passo. Sostituiamo l'espressione trovata per x nella prima equazione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(2y+2)-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

3° passo. Risolviamo l'equazione risolvente.

$$\frac{(2y+2)-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \quad \text{Equazione risolvente}$$

$$\frac{2y+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \quad \text{Togliendo la parentesi tonda}$$

$$6 \cdot \frac{2y+1}{2} + 6 \cdot \frac{y+2}{3} = 6 \cdot 1 \quad 6 \text{ è il m.c.m. dei denominatori}$$

$$3(2y+1) + 2(y+2) = 6 \quad \text{Semplificando}$$

$$6y + 3 + 2y + 4 = 6 \quad \text{Proprietà distributiva}$$

$$8y = -1 \quad \text{Riducendo i termini simili e portando i numeri al 2° membro}$$

$$y = -\frac{1}{8} \quad 2^\circ \text{ principio di equivalenza}$$

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI



4° passo. Ricaviamo x, sostituendo il valore trovato per y nell'equazione $x = 2y + 2$, ricavata al 1° passo.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 2\left(-\frac{1}{8}\right) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

5° passo. La soluzione del sistema è la coppia ordinata:

$$\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

- Viene qui risolto con il metodo di sostituzione il **Problema 2** di pagina 3 (relativo ai punteggi delle domande e dei problemi):

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

1° passo. Si ricava ad esempio la x in funzione della y dalla prima equazione del sistema; otteniamo:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29-3y}{7} \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

2° passo. Sostituiamo l'espressione trovata per x nella seconda equazione del sistema.

$$\begin{cases} x = \frac{29-3y}{7} \\ 10x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29-3y}{7} \\ 10 \frac{29-3y}{7} + 2y = 30 \end{cases}$$

3° passo. Risolviamo l'equazione risolvente.

$$10 \frac{29-3y}{7} + 2y = 30 \quad \text{Equazione risolvente}$$

$$7 \cdot \frac{290-30y}{7} + 7 \cdot 2y = 7 \cdot 30 \quad 7 \text{ è il m.c.m. dei denominatori}$$

$$290 - 30y + 14y = 210 \quad \text{Semplificando}$$

$$-16y = -80 \quad \text{Riducendo i termini simili e portando i numeri al 2° membro}$$

$$y = \frac{80}{16} = 5 \quad 2^\circ \text{ principio di equivalenza}$$

4° passo. Ricaviamo x, sostituendo il valore trovato per y nell'equazione $\frac{29-3y}{7}$, ricavata al 1° passo.

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{29-3y}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{29-3 \times 5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{29-15}{7} = \frac{14}{7} = 2 \end{cases}$$

5° passo. La soluzione del sistema è la coppia ordinata: (2,5)

Ogni domanda vale 2 punti e ogni problema vale 5 punti.

2. Metodo del confronto

Una variante del metodo di sostituzione è il cosiddetto **metodo del confronto**. Esso consiste nel ricavare l'equazione risolvente risolvendo entrambe le equazioni del sistema rispetto alla **stessa incognita** e uguagliando le espressioni ottenute.

Si conclude poi la risoluzione del sistema come nel metodo di sostituzione.

ESEMPIO

Risolvi, con il metodo del confronto, il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

1° passo.

Scegliamo di risolvere entrambe le equazioni del sistema rispetto a y (non conviene risolvere le due equazioni rispetto a x perché, risolvendo la prima equazione rispetto a x , si verrebbero a introdurre delle frazioni).

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

2° passo.

Uguagliando le due espressioni colorate in rosso, che esprimono y in funzione di x , otteniamo l'equazione risolvente:

$$1 - 2x = 4 - x$$

3° passo.

Risolvi l'equazione risolvente.

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 4 - x && \text{Equazione risolvente} \\ -2x + x &= 4 - 1 && \text{Portando i termini dipendenti da } x \text{ al } 1^\circ \text{ membro e gli altri al secondo} \\ -x &= 3 && \text{Riducendo i termini simili} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

4° passo.

Ora ricaviamo il valore di y , sostituendo il valore di x trovato, per esempio, nella seconda delle due equazioni (ricavate al 1° passo) che esprimono y :

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$$

5° passo.

La soluzione del sistema è la coppia ordinata: (-3,7)

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI



Risolvere i seguenti sistemi col metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \quad [(1,2)]$$

$$\begin{cases} x + 2(y - 1) = 6 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{2x+y}{10} = \frac{1}{5} + \frac{x}{4} \\ x + 9y = -5 \end{cases} \quad \left[\left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = \frac{1}{3} \\ 0,5x - y = 3 \end{cases} \quad [\text{impossibile}]$$

Risolvere i seguenti sistemi col metodo del confronto

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1 \\ x - 2y = -6 \end{cases} \quad [(0,3)]$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{(2-y)(y-2)}{4} = -\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 \\ (3-x)^2 = x^2 + y \end{cases} \quad [(1,3)]$$

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI

