Ministero Dell'Istruzione
CENTRO PROVINCIALE ISTRUZIONE ADULTI DI UDINE
UDINE - CIVIDALE DEL FRIULI – CODROIPO – GEMONA DEL FRIULI - SAN GIORGIO DI N. – TOLMEZZO
Via Diaz n° 60 – 33100 UDINE (UD) – telefono 0432500634
Codice fiscale 94134770307 - *Codice Scuola – UDMM098007*
e-mail: UDMM098007@istruzione.gov.it *Posta certificata:* - UDMM098007@pec.istruzione.it
Sito web www.cpiaudine.edu.it

Secondo periodo didattico	**Asse matematico-scientifico-tecnologico Matematica**
COMPETENZA N. 1	**Uda: ARITMETICA E ALGEBRA**
Argomento: Sistemi	**Ore Fad:**

ANNO SCOLASTICO 2021/2022

Progetti finanziati da
SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO
E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI

TITOLO: SISTEMI LINEARI	
CONTENUTI	- Definire cos'è un sistema di equazioni e illustrare i principali metodi risolutivi.
MATERIALE DIDATTICO	- **Testo**: studiare il contenuto del documento - **Video**: https://www.youtube.com/watch?v=-v9eyAeUNxQ (metodo grafico) https://www.youtube.com/watch?v=rkwDJ2bh3uc (metodo di sostituzione e di addizione e sottrazione); https://www.youtube.com/watch?v=hwYL7guJphQ (metodo del confronto); https://www.youtube.com/watch?v=WzVKpl9JIOY (metodo di Cramer)
Cosa impariamo a fare	Dallo studio del testo sarà Definire un'equazione e classificarla - Risolvere sistemi lineari in due e tre incognite.
ISTRUZIONI PER LO STUDIO A CASA **Leggere il testo e svolgere gli esercizi assegnati presenti in fondo all'unità.**	
VERIFICA/CONSEGNA	Inviare a COGNOME documento Google oppure COGNOME_FOTO.jpg Indica nell'OGGETTO della mail il COGNOME.

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI

Sistemi lineari

1. Che cos'è un sistema?

Si è visto che mediante le equazioni in *una* incognita possiamo formalizzare e risolvere molti problemi. Tuttavia, nei problemi in cui gli elementi non noti, da determinare, sono *più di uno* le equazioni in una sola incognita non forniscono sempre un modello algebrico adeguato.
Per renderci conto di questo fatto, analizziamo insieme alcuni problemi.

- **Problema 1**

In un cinema, i biglietti ordinari vengono venduti al prezzo di 7 euro e quelli ridotti, destinati a bambini di età inferiore a otto anni, al prezzo di 5 euro. In una serata, sono stati venduti complessivamente 156 biglietti e sono stati incassati 1044 euro.
Quanti biglietti ordinari e quanti ridotti sono stati venduti?

In questo problema ci sono *due* elementi che non conosciamo: il numero di biglietti *ordinari* e il numero di biglietti *ridotti* che sono stati venduti. Tuttavia, se indichiamo con *x* il numero di biglietti ordinari venduti, è facile esprimere in funzione di *x* il numero di biglietti ridotti: sappiamo che sono stati venduti complessivamente 156 biglietti, quindi il numero di biglietti ridotti venduti è 156 - x.
A questo punto il problema può essere risolto mediante la seguente equazione in una incognita:

$$\underbrace{7}_{\text{prezzo biglietto ordinario}} \cdot \underbrace{x}_{\text{numero di biglietti ordinari venduti}} + \underbrace{5}_{\text{prezzo biglietto ridotto}} \cdot \underbrace{(156-x)}_{\text{numero di biglietti ridotti venduti}} = \underbrace{1044}_{\text{incasso totale}}$$

Riassumendo: questo problema presenta due incognite, ma è facile esprimere un'incognita in funzione dell'altra, quindi il problema può essere ugualmente risolto tramite un'equazione di primo grado in *una* incognita.

- **Problema 2**

Un test è formato da domande e problemi: Paolo risponde esattamente a 7 domande, svolge correttamente 3 problemi e ottiene 29 punti. Francesca risponde esattamente a 10 domande, svolge correttamente 2 problemi e ottiene 30 punti.
Quanti punti vale una domanda e quanti un problema?

Anche in questo problema ci sono *due* elementi che non conosciamo: il punteggio assegnato a una domanda e il punteggio assegnato a un problema. Tuttavia, in questo caso, se indichiamo con *x* il punteggio di una domanda, *non è facile* esprimere in funzione di *x* il punteggio di un problema. Ecco quindi che il modello delle equazioni *in una sola incognita non si rivela* adeguato.
È più semplice formalizzare il problema introducendo *due* incognite: indichiamo con *x* il punteggio di una domanda e con *y* il punteggio di un problema.
Osserviamo poi la seguente tabella.

Tipo di quesito	Domande	Problemi	Totale	
Punteggio per quesito	x	y		
Punteggio di Paolo	$7x$	$3y$	29	$\longrightarrow 7x + 3y = 29$
Punteggio di Francesca	$10x$	$2y$	30	$\longrightarrow 10x + 2y = 30$

Dalla seconda riga della tabella ricaviamo l'equazione che traduce la prima informazione, e cioè che il punteggio totale ottenuto da Paolo è 29 punti:

$$7x + 3y = 29$$

Dalla terza riga della tabella ricaviamo l'equazione che traduce la seconda informazione, e cioè che il punteggio totale ottenuto da Francesca è 30 punti:

$$10x + 2y = 30$$

Il modello algebrico del nostro problema diventa allora il seguente: trovare i due numeri incogniti x e y che soddisfano, contemporaneamente, le seguenti due equazioni:

$$7x + 3y = 29 \quad \text{e} \quad 10x + 2y = 30$$

Per precisare il nuovo modello algebrico scaturito, introduciamo la seguente definizione.

SISTEMA DI EQUAZIONI

Un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite che si vuole siano soddisfatte contemporaneamente si chiama sistema di equazioni.

Dunque, il problema precedente ha come modello un sistema di equazioni.
Per indicare un sistema di equazioni si usa scrivere le equazioni su righe diverse, racchiudendole con una parentesi graffa posta alla loro sinistra.
In questo caso, il problema dei punteggi delle domande e dei problemi ha come modello algebrico il sistema:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni, in due incognite: x e y che verrà risolto in seguito.

Le soluzioni di un sistema

In questa sede verranno trattati prevalentemente sistemi formati da due equazioni di primo grado, in due incognite, che saranno indicate generalmente con x e y.
Sistemi, cioè, costituiti da due equazioni della forma:
$ax + by = c \text{ con } a \neq 0 \; o \; b \neq 0$
Una **soluzione** di un'**equazione** di questo tipo è una **coppia ordinata** di numeri reali che, sostituiti nell'equazione al posto di x e y, la trasformano in una uguaglianza *vera*.

ESEMPI

- La coppia ordinata $(3{,}2)$ è una soluzione dell'equazione: $x - 2y = -1$
  Infatti, sostituendo 3 al posto di x e 2 al posto di y, otteniamo: $3 - 2 \cdot 2 = -1$ ossia, $3 - 4 = -1$, che è un'uguaglianza vera.
  Puoi controllare che sono soluzioni dell'equazione anche tutte le seguenti coppie ordinate:
  $(-7, -3), (-5, -2), (-3, -1), (-1, 0), (1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)$
  e, in generale, tutte le coppie ordinate del tipo $(2h - 1, h)$, dove h può essere qualsiasi numero reale.
  L'equazione $x - 2y = -1$ ha, quindi, infinite soluzioni.
- La coppia ordinata $(2{,}3)$ non è una soluzione dell'equazione: $x - 2y = -1$
  Infatti, sostituendo 2 al posto di x e 3 al posto di y, otteniamo: $2 - 2 \cdot 3 = -1$
  ossia, $2 - 6 = -1$, che è un'uguaglianza falsa.

Una soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite è una coppia ordinata di numeri reali, che soddisfa entrambe le equazioni del sistema.

ESEMPIO

Stabiliamo se $(3, -7)$ è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Sostituiamo 3 al posto di x e - 7 al posto di y, nelle due equazioni del sistema.

$x + y = -4$		$3x + y = 2$	
$3 + (-7) = -4$		$3 \cdot 3 + (-7) = 2$	
$-4 = -4$	VERO	$2 = 2$	VERO

Poiché la coppia ordinata $(3, -7)$ soddisfa entrambe le equazioni, essa è una soluzione del sistema.

La soluzione di un sistema può essere indicata in vari modi. In riferimento all'esempio precedente, per esempio si può:

- scrivete la coppia ordinata: (3, - 7);
- assegnare la soluzione nella forma: x = 3 e y = - 7
- utilizzare la notazione insiemistica e indicare l'insieme delle soluzioni del sistema:
  S = {(3, -7)}.

I sistemi si classificano in base al numero di soluzioni che presentano.

Un sistema si dice:

• determinato, se ha un numero finito di soluzioni;

• impossibile, se non ha soluzioni;

• indeterminato, se ha infinite soluzioni.

Un sistema di equazioni ha generalmente un numero finito di soluzioni, a meno del caso particolare in cui il sistema sia indeterminato.
Due sistemi che hanno le stesse soluzioni si dicono equivalenti.

Sistemi interi e frazionari

Un sistema si dice intero se tutte le equazioni che lo compongono sono intere, altrimenti si dice frazionario.

ESEMPI

a. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ è intero. Né x, né y si trovano al denominatore

b. $\begin{cases} \frac{x}{y}+x=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ è frazionario. L'incognita y compare anche al denominatore

Grado di un sistema
Si dice grado di un sistema intero il prodotto dei gradi delle sue equazioni.
Un sistema di primo grado viene detto **lineare**.

Esempi:

$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y=2 \end{cases}$	è di primo grado	**Entrambe le equazioni sono di primo grado, quindi il prodotto dei gradi è 1x1=1**
$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$	è di secondo grado	**La prima equazione ha grado 1 e la seconda ha grado 2, quindi il prodotto dei gradi è 1x2 = 2**
$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$	è di quarto grado	**Entrambe le equazioni hanno grado 2, quindi il prodotto dei gradi è 2x2=4**
$\begin{cases} x^2y=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$	è di sesto grado	**La prima equazione ha grado 3 e la seconda ha grado 2, quindi il prodotto dei gradi è 2x3 = 6**

STRATEGIE RISOLUTIVE

Interpretazione grafica

I sistemi lineari di due equazioni in due incognite si possono interpretare graficamente.

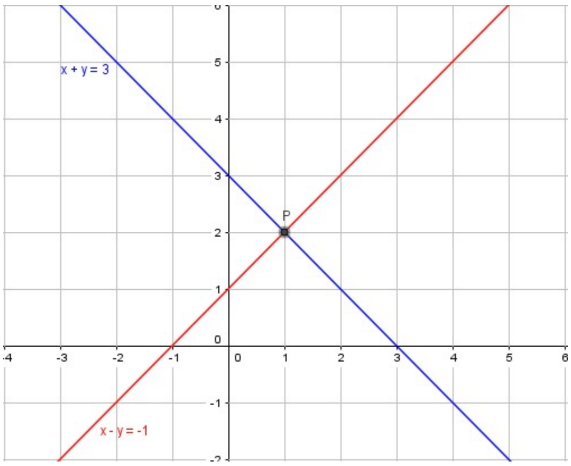
ESEMPIO

Interpretiamo graficamente il sistema:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Risolvendo le due equazioni del sistema rispetto a y, si trova che esse equivalgono a $x - y = -1$ e $x + y = 3$.

Riconosciamo così che esse rappresentano due rette nel piano cartesiano



Le soluzioni della prima equazione del sistema (che sono coppie ordinate di numeri reali) non sono altro che le coordinate dei punti della retta colorata in rosso e le soluzioni della seconda equazione non sono altro che le coordinate dei punti della retta colorata in blu. L'unica soluzione in comune a entrambe le equazioni è quella che corrisponde alle coordinate del punto d'intersezione P delle due rette. Dalla figura si riconosce che P ha coordinate $(1,2)$ quindi possiamo concludere che il sistema dato ha un'unica soluzione: la coppia ordinata $(1,2)$.

Considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esempio precedente si possono ripetere per qualsiasi sistema lineare di due equazioni in due incognite:

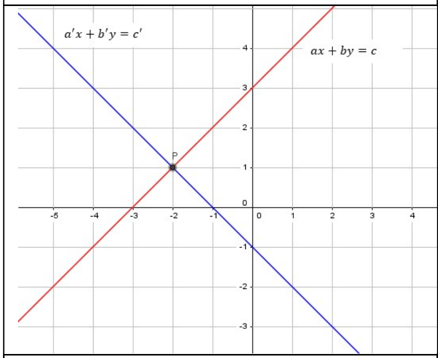
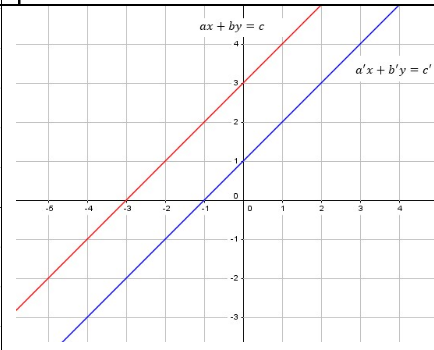
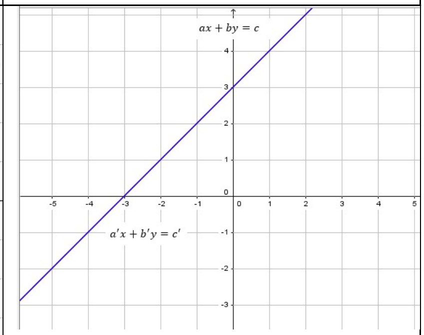
- ogni sistema di questo tipo si può ricondurre alla seguente forma, detta forma normale (o forma canonica) del sistema:
  $$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
  dove a, b, c, a', b', c' possono essere numeri reali qualsiasi (con a o b diversi da 0 e a' o b' diversi da 0).
- le due equazioni $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ rappresentano, nel piano cartesiano, le equazioni di due rette;
- cercare le soluzioni del sistema equivale a cercare le coordinate del punto d'intersezione di tali rette (se c'è).

Quando, come nell'esempio precedente, le coordinate del punto d'intersezione sono facili da individuare (ovvero quando sono espresse da numeri interi e di valore assoluto “abbastanza piccolo”) la rappresentazione grafica fornisce anche un metodo per individuare la soluzione del sistema.

Le possibili soluzioni di un sistema lineare di due equazioni in due incognite.
L'interpretazione grafica dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite permette anche di capire chiaramente quale può essere la forma delle soluzioni di questi sistemi.
Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e riflettiamo su quale può essere la posizione reciproca delle due rette di equazioni $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$. Si possono presentare le seguenti possibilità.

Le due rette sono **incidenti** in un punto P.	Le due rette sono **parallele distinte** e quindi non hanno punti in comune.	Le due rette **coincidono.**
		
Il sistema ha una sola soluzione: le coordinate di P. Quindi il sistema è **determinato.**	Il sistema non ha soluzioni: è **impossibile.**	Il sistema ha infinite soluzioni (le coordinate degli infiniti punti che appartengono alle due rette coincidenti) e risulta, perciò, **indeterminato.**

2. Il metodo di sostituzione
Ci sono vari metodi per risolvere un sistema.
Uno dei più usati e generali è il cosiddetto metodo di sostituzione: esso si può utilizzare (non solo per sistemi lineari) ogniqualvolta è facile ricavare, da una delle due equazioni del sistema, un'incognita in funzione dell'altra.

ESEMPIO
Risolviamo, con il metodo di sostituzione, il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Possiamo, per esempio, esprimere y in funzione di x, risolvendo la prima equazione del sistema rispetto all'incognita y; otteniamo così:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

Ora sostituiamo $3 - 2x$ al posto di y nella seconda equazione del sistema:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2(3 - 2x) = 9 \end{cases}$$

Il punto chiave è che la sostituzione permette di ottenere un'equazione in una sola incognita, detta equazione risolvente del sistema:
$x + 2(3 - 2x) = 9$

Risolvendo quest'ultima equazione otteniamo il valore di x:
$x + 2(3 - 2x) = 9 \Rightarrow x + 6 - 4x = 9 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$

A questo punto, per ricavare anche il valore di y, basta sostituire -1 al posto di x nell'equazione che esprime y:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - 2(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è, quindi, la coppia ordinata $(-1,5)$

Questo esempio suggerisce il seguente procedimento per risolvere, in generale, un sistema di due equazioni in due incognite con il metodo di sostituzione.

1° passo: si risolve una delle due equazioni del sistema rispetto a un'incognita (scegliendo l'equazione e l'incognita in modo da essere condotti ai calcoli più semplici possibili);

2° passo: si sostituisce l'espressione trovata nell'altra equazione: si ottiene così un'equazione in una sola incognita, detta equazione risolvente il sistema;

3° passo: si risolve l'equazione risolvente;

4° passo: si sostituisce il valore dell'incognita trovata al passo precedente nell'equazione esplicitata ricavata al 1° passo e si ricava, così, il valore dell'incognita ancora da determinare;

5° passo: si conclude scrivendo la soluzione del sistema.

ESEMPIO
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

1° passo. Osservando le due equazioni del sistema si riconosce che conviene ricavare x in funzione di y dalla seconda equazione del sistema; otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

2° passo. Sostituiamo l'espressione trovata per x nella prima equazione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(2y+2)-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

3° passo. Risolviamo l'equazione risolvente.

$\frac{(2y+2)-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1$	Equazione risolvente
$\frac{2y+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1$	Togliendo la parentesi tonda
$6 \cdot \frac{2y+1}{2} + 6 \cdot \frac{y+2}{3} = 6 \cdot 1$	6 è il m.c.m. dei denominatori
$3(2y+1) + 2(y+2) = 6$	Semplificando
$6y + 3 + 2y + 4 = 6$	Proprietà distributiva
$8y = -1$	Riducendo i termini simili e portando i numeri al 2° membro
$y = -\frac{1}{8}$	2° principio di equivalenza

4° passo. Ricaviamo x, sostituendo il valore trovato per y nell'equazione $x = 2y + 2$, ricavata al 1° passo.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = 2\left(-\frac{1}{8}\right) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{8} \\ x = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

5° passo. La soluzione del sistema è la coppia ordinata:
$\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

- Viene qui risolto con il metodo di sostituzione il **Problema 2** di pagina 3 (relativo ai punteggi delle domande e dei problemi):

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

1° passo. Si ricava ad esempio la x in funzione della y dalla prima equazione del sistema; otteniamo:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ 10x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29-3}{7} \\ 10x + 2y = 30 \end{cases}$$

2° passo. Sostituiamo l'espressione trovata per x nella seconda equazione del sistema.

$$\begin{cases} x = \dfrac{29-3y}{7} \\ 10x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{29-3y}{7} \\ 10\,\dfrac{29-3y}{7} + 2y = 30 \end{cases}$$

3° passo. Risolviamo l'equazione risolvente.

$10\,\dfrac{29-3y}{7} + 2y = 30$	Equazione risolvente
$7 \cdot \dfrac{290-30y}{7} + 7 \cdot 2y = 7 \cdot 30$	7 è il m.c.m. dei denominatori
$290 - 30y + 14y = 210$	Semplificando
$-16y = -80$	Riducendo i termini simili e portando i numeri al 2° membro
$y = \dfrac{80}{16} = 5$	2° principio di equivalenza

4° passo. Ricaviamo x, sostituendo il valore trovato per y nell'equazione $\frac{29-3y}{7}$, ricavata al 1° passo.

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{29-3y}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{29-3\times 5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \dfrac{29-15}{7} = \dfrac{14}{7} = 2 \end{cases}$$

5° passo. La soluzione del sistema è la coppia ordinata: $(2{,}5)$

Ogni domanda vale 2 punti e ogni problema vale 5 punti.

Progetti finanziati da
SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO
E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI
UNIONE EUROPEA
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
PON 2014-2020
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO - FSE
MIUR
REGIONE AUTONOMA FRIULI VENEZIA GIULIA
MINISTERO DELL'INTERNO

3. Metodo del confronto

Una variante del metodo di sostituzione è il cosiddetto **metodo del confronto**. Esso consiste nel ricavare l'equazione risolvente risolvendo entrambe le equazioni del sistema rispetto alla **stessa incognita** e uguagliando le espressioni ottenute.
Si conclude poi la risoluzione del sistema come nel metodo di sostituzione.

ESEMPIO
Risolviamo, con il metodo del confronto, il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

1° passo.
Scegliamo di risolvere entrambe le equazioni del sistema rispetto a y (non conviene risolvere le due equazioni rispetto a x perché, risolvendo la prima equazione rispetto a x, si verrebbero a introdurre delle frazioni).

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

2° passo.
Uguagliando le due espressioni colorate in rosso, che esprimono y in funzione di x, otteniamo l'equazione risolvente:
$1 - 2x = 4 - x$

3° passo.
Risolviamo l'equazione risolvente.

$1 - 2x = 4 - x$	Equazione risolvente
$-2x + x = 4 - 1$	Portando i termini dipendenti da x al 1° membro e gli altri al secondo
$-x = 3$	Riducendo i termini simili
$x = -3$	

4° passo.
Ora ricaviamo il valore di y, sostituendo il valore di x trovato, per esempio, nella seconda delle due equazioni (ricavate al 1° passo) che esprimono y:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$$

5° passo.
La soluzione del sistema è la coppia ordinata: $(-3,7)$

Progetti finanziati da
SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO
E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
UNIONE EUROPEA
PON 2014-2020
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO - FSE
MIUR
REGIONE AUTONOMA FRIULI VENEZIA GIULIA
MINISTERO DELL'INTERNO

4. Metodo di addizione e sottrazione

Ricordiamo, anzitutto, la seguente proprietà dei numeri reali:

se A = B e C = D

allora

A + C = B + D e A – C = B – D

Questa proprietà consente di addizionare o sottrarre membro a membro le equazioni di un sistema ed è alla base di un metodo per risolvere i sistemi, detto **metodo di addizione e sottrazione** (o metodo di riduzione). Per introdurre questo metodo cominciamo con il presentare subito un esempio.

Esempio

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

In questo caso, la possibilità di poter addizionare membro a membro le due equazioni del sistema è particolarmente vantaggiosa in quanto nella prima equazione compare il termine -3y e nella seconda compare il termine +3y. Questi due termini sono opposti quindi, addizionandoli, otteniamo 0, ovvero riusciamo a «eliminare» la variabile y e a ottenere un'equazione risolvente in x.

Facciamo i calcoli.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

$\overline{7x + 0 = 14}$ Addizionando membro a membro

$7x = 14$ Abbiamo trovato un'equazione risolvente in x

$x = 2$

Per determinare il valore di y, sostituiamo 2 al posto di x in una delle due equazioni del sistema e risolviamo l'equazione ottenuta. Per esempio, sostituendo nella prima equazione otteniamo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - 3y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$

Più in generale: ogniqualvolta nelle equazioni di un sistema, ridotto in forma normale, i termini in una delle due incognite sono opposti (uguali), si può ottenere un'equazione risolvente in una sola incognita sommando (sottraendo) membro a membro le due equazioni.

È importante osservare che, utilizzando il secondo principio di equivalenza delle equazioni, è sempre possibile trasformare le due equazioni di un sistema in modo che abbiano **uguali** o **opposti** i termini in una delle due incognite.

Esempio.
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Se addizionassimo subito le equazioni membro a membro, otterremmo l'equazione 7x + 3y = 5: l'addizione membro a membro sarebbe inutile, perché non permetterebbe di «eliminare» nessuna variabile. Possiamo tuttavia osservare che, se nella prima equazione, invece del termine -3y, comparisse il termine -6y, allora, addizionando membro a membro, riusciremmo a eliminare la variabile y. Al fine di far comparire nella prima equazione il termine -6y, invece di -3y, moltiplichiamo i suoi due membri per 2 (2° principio di equivalenza).

$$\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$ Moltiplicando per 2 i due membri della prima equazione

$$9x + 0 = 6$$ Addizionando membro a membro

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Per determinare y, sostituiamo il valore di x trovato, per esempio, nella seconda equazione del sistema.

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 5 \cdot \frac{2}{3} + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 6y = 4 - \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 6y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

La soluzione del sistema è quindi la coppia ordinata $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$

5. Metodo di Cramer e criterio dei rapporti

Il teorema di Cramer

Introduciamo ora delle nuove notazioni, che ci permetteranno di enunciare un importante teorema che consente di risolvere in modo semplice e rapido un sistema lineare di due equazioni in due incognite in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Consideriamo anzitutto i coefficienti delle incognite del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e scriviamoli tra due parentesi quadre, in uno schema di questo tipo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

Tale schema si chiama matrice dei coefficienti del sistema: si tratta di una matrice a due righe e due colonne. Gli elementi a, b' si dicono elementi sulla diagonale principale e gli elementi *a'*, *b,* elementi sulla diagonale secondaria. Si definisce determinante di una matrice a due righe e due colonne il numero ottenuto calcolando il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e sottraendo da esso il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria; per indicare il determinante di una matrice si indicano gli elementi della matrice fra due linee verticali:

determinante di $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Fatte queste premesse, possiamo associare a ogni sistema

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

tre determinanti:

1. Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema, che si chiama **determinante del sistema** e si indica con la lettera D:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

2. Il determinante ottenuto da quello del sistema, sostituendo, al posto della prima colonna, I termini noti c e c'; tale determinante si chiama **determinante relativo all'incognita x** e si indica con il simbolo D_x:

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

3. Il determinante ottenuto da quello del sistema, sostituendo, al posto della seconda colonna, i termini noti c e c'; tale determinante si chiama **determinante relativo all'incognita y** e si indica con il simbolo D_y:

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

In sintesi:
Dato il sistema lineare

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

valgono i seguenti fatti:
• se $D \neq 0$, il sistema è **determinato** e ha come soluzione:

$x = \frac{D_x}{D}$ $\qquad$ $y = \frac{D_y}{D}$

• se $D = 0$ e, inoltre, $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, allora il sistema è **impossibile**;
• se $D = D_x = D_y = 0$, allora il sistema è **indeterminato**.

ESEMPIO
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

mediante il teorema di Cramer.

Calcoliamo i tre determinanti associati al sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3 \cdot (-5) = -8 + 15 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 4(-4) - 6(-5) = -16 + 30 = 14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

Dal momento che $D \neq 0$, per il teorema di Cramer, il sistema è determinato. Sempre per il teorema di Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{7} = 0$$

Pertanto la soluzione del sistema è la coppia ordinata $(2,0)$.

6. Sistemi frazionari

Per risolvere un sistema frazionario lo schema logico da adottare è analogo a quello con cui abbiamo affrontato le equazioni frazionarie: si pongono anzitutto le condizioni di esistenza, quindi si riconduce il sistema dato a un sistema intero, liberando dai denominatori le equazioni che lo compongono e si risolve il sistema così ottenuto; infine si verifica l'accettabilità delle soluzioni in relazione alle condizioni di esistenza.

ESEMPIO Sistema frazionario riconducibile a lineare
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{2x - 2y} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

• Poniamo le condizioni di esistenza
  Riscriviamo anzitutto il sistema scomponendo i denominatori:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{2(x-y)} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche che compaiono nella prima equazione sono:

C.E.: $x \neq y$ e $x \neq -y$

• Riconduciamo il sistema a un sistema intero e lo risolviamo
A patto che siano verificate le C.E., possiamo moltiplicare i due membri della prima equazione per il minimo comune multiplo dei denominatori.

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{2(x-y)}$$

Il m.c.m. dei denominatori è $2(x-y)(x+y)$

$$2(x-y)(x+y)\frac{1}{(x-y)(x+y)} = 2(x-y)(x+y)\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{2(x-y)}\right)$$

$$2(x-y)(x+y) \cdot \frac{1}{(x-y)(x+y)} = 2(x-y)(x+y) \cdot \frac{1}{x+y} - 2(x-y)(x+y) \cdot \frac{1}{2(x-y)}$$

$2 = 2(x-y) - (x+y)$
$x - 3y = 2$

Possiamo risolvere il seguente sistema intero:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema, si trova come soluzione

$$(-1, -1)$$

• Verifichiamo se la soluzione trovata è accettabile
Dobbiamo ora controllare se la soluzione trovata soddisfa le C.E.
In questo caso $(-1, -1)$ non soddisfa la condizione x y, quindi non è accettabile come soluzione del sistema originario. Dobbiamo perciò concludere che il sistema dato è impossibile.

7. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Finora ci siamo occupati di sistemi lineari dl *due* equazioni in *due* incognite. Consideriamo ora i sistemi lineari di *tre* equazioni in *tre* incognite. Per esempio:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni, nelle tre incognite x, y e z.

Una soluzione di un sistema di equazioni in tre incognite è una terna ordinata di numeri reali che soddisfa tutte le equazioni che compongono il sistema.

Per risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, si possono utilizzare ancora il metodo di sostituzione e il metodo di addizione e sottrazione (il metodo grafico non è più facilmente applicabile, perché l'interpretazione grafica di un sistema in tre incognite può avvenire solo nello spazio).

ESEMPIO

Sistema in tre incognite risolto con il metodo di sostituzione

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=-1 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$$

1° passo.

Risolviamo la prima equazione rispetto a z:

$$\begin{cases} z=1-x-y \\ x+2y-z=-1 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$$

2° passo.

Sostituiamo l'espressione trovata per z nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} z=1-x-y \\ x+2y-(1-x-y)=-1 \\ 2x+y+2(1-x-y)=3 \end{cases}$$

3° passo.

Le ultime due equazioni del sistema scritto al 2° passo formano il seguente sistema, di due equazioni in due incognite, che sappiamo risolvere:

$$\begin{cases} x+2y-(1-x-y)=-1 \\ 2x+y+2(1-x-y)=3 \end{cases}$$

Risolvendolo, troviamo che:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-1 \end{cases}$$

4° passo.

Per determinare z, sostituiamo i valori di x e y trovati nell'equazione: $z=1-x-y$

$$z=1-\frac{3}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

5° passo.

La soluzione del sistema è la terna ordinata

$$(\frac{3}{2},-1,\frac{1}{2})$$

Progetti finanziati da

SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO

E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI

In sintesi:

1° passo: si ricava da una delle tre equazioni del sistema l'espressione di una incognita in funzione delle altre due;

2° passo: si sostituisce nelle altre due equazioni l'espressione trovata: queste due equazioni vengono così a formare un sistema di due equazioni in due incognite che sappiamo risolvere;

3° passo: si risolve il sistema in due incognite a cui si è giunti nel passo precedente, determinando così i valori di due delle tre incognite;

4° passo: si sostituiscono i valori delle due incognite ricavati al passo precedente nell'equazione ottenuta al 1° passo, determinando così il valore della terza incognita;

5° passo: si conclude scrivendo la soluzione del sistema.

Metodo di addizione e sottrazione

Anche il metodo di addizione e sottrazione può essere applicato per risolvere sistemi di tre equazioni in tre incognite. Presentiamo la risoluzione, con questo metodo, del sistema che nell'esempio precedente abbiamo risolto per sostituzione.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=-1 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$$

1° passo.

Eliminiamo una delle tre incognite da due equazioni. Per esempio, possiamo eliminare z, sommando membro a membro le prime due equazioni del sistema.

	$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$	Prima equazione Seconda equazione
Equazione *a*	$2x+3y=0$	Addizionando le equazioni membro a membro

2° passo.

Eliminiamo ancora l'incognita z, da due equazioni diverse da quelle utilizzate nel passo precedente. A tale scopo possiamo, per esempio, moltiplicare i due membri della seconda equazione per 2 e sommarla alla terza.

	$\begin{cases} 2x+4y-2z=-2 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$	Moltiplicando per 2 i due membri della seconda equazione Terza equazione
Equazione *b*	$4x+5y=1$	Addizionando le equazioni membro a membro

3° passo.
Eliminiamo la x o la y dalle equazioni *a* e *b*. Osservando le due equazioni si vede che è semplice eliminare la x, moltiplicando i due membri della *a* per 2 e sottraendo dall'equazione ottenuta la *b*.

$$\begin{cases}4x+6y=0\\4x+5y=1\end{cases}$$ Moltiplicando per 2 i due membri dell'equazione *a*; Equazione *b*

$$y=-1$$ Sottraendo dalla prima equazione la seconda

4° passo.
Abbiamo ricavato il valore di y. Ora determiniamo, per sostituzione, i valori di x e di z. Sostituendo il valore di y, per esempio, nell'equazione *a*, $2x+3y=0$, ricaviamo x:

$$2x+3(-1)=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Sostituendo i valori di x e di y, per esempio, nella prima equazione del sistema originario, $x+y+z=1$, ricaviamo z:

$$\frac{3}{2}+(-1)+z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

5° passo.
La soluzione del sistema è la terna ordinata: $\left(\frac{3}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$

Risolvere i seguenti sistemi col metodo di sostituzione

$$\begin{cases}x=5-2y\\2x-3y=-4\end{cases}$$ $[(1,2)]$

$$\begin{cases}x+2(y-1)=6\\2x-y=-1\end{cases}$$ $[(\frac{6}{5},\frac{17}{5})]$

$$\begin{cases}\frac{x-y}{2}-\frac{2x+y}{10}=\frac{1}{5}+\frac{x}{4}\\x+9y=-5\end{cases}$$ $[(-\frac{8}{7},-\frac{3}{7})]$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-y=\frac{1}{3}\\0{,}5x-y=3\end{cases}$$ [impossibile]

$$\begin{cases}2=\dfrac{1}{x-y}\\2x-3y=-1\end{cases}$$ $[(\frac{5}{2},2)]$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+1=\frac{y}{2x}\\x-1=y+1\end{cases}$$ $[(-4,-6)]$

Progetti finanziati da
SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO
E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
UNIONE EUROPEA
PON 2014-2020
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO -FSE
MIUR
REGIONE AUTONOMA FRIULI VENEZIA GIULIA
MINISTERO DELL'INTERNO

$$\begin{cases} x = y - z + 1 \\ z = 2x - y \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$ $[(-3,-5,-1)]$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 6y + 2z = 1 \\ x - 2y + z = 32 \end{cases}$$ $[(13,-5,9)]$

Risolvere i seguenti sistemi col metodo del confronto

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$ $[(\frac{3}{7},\frac{5}{7})]$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$ $[(\frac{3}{2},\frac{3}{4})]$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$ $[(0,3)]$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{(2-y)(y-2)}{4} = -\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 \\ (3-x)^2 = x^2 + y \end{cases}$$ $[(1,3)]$

Risolvere i seguenti sistemi col metodo di addizione e sottrazione

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ $[(1,\frac{3}{2})]$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - (y-1)^2 = (1-y)(1+y) \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$$ $[(8,-1)]$

$$\begin{cases} 3x - 6y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$ $[(\frac{5}{3},\frac{1}{6})]$

$$\begin{cases} 10x - 5y = 2 \\ 15x + 20y = 14 \end{cases}$$ $[(\frac{2}{5},\frac{2}{5})]$

Risolvere i seguenti sistemi col metodo di Cramer

$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ $[(\frac{2}{7}, \frac{3}{7})]$

$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ $[(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})]$

$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x - \frac{3}{2}y = -1 \end{cases}$ $[(11,8)]$

$\begin{cases} (2x - 1 - y)^2 = (2x - y)^2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ $[(\frac{4}{5}, \frac{11}{10})]$

Progetti finanziati da
SERVIZIO CORREGIONALI ALL'ESTERO
E INTEGRAZIONE DEGLI IMMIGRATI
UNIONE EUROPEA
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
PON 2014-2020
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO - FSE
MIUR
REGIONE AUTONOMA FRIULI VENEZIA GIULIA
MINISTERO DELL'INTERNO

Sintesi e confronto dei metodi risolutivi di un sistema

Metodo	**Vantaggi**	**Svantaggi**
Grafico	• Permette di «vedere» la soluzione.	• Non permette di determinare esattamente la soluzione, se questa coinvolge numeri che non sono interi. • Le soluzioni potrebbero non apparire nella parte di grafico disegnata.
Sostituzione	• Permette di determinare le soluzioni esatte. • È conveniente quando in una delle due equazioni del sistema un'incognita ha coefficiente uguale a 1.	• Può condurre a calcoli un po' laboriosi quando si parte da un sistema in forma normale, in cui tutti i coefficienti sono diversi da 1. • Non permette di «vedere» la soluzione.
Confronto	• Permette di determinare le soluzioni esatte. • È il metodo più rapido quando si vogliono trovare le coordinate del punto d'intersezione di due rette di cui sono date le equazioni nella forma $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$.	• Generalmente non è vantaggioso se il sistema è dato in forma normale. • Non permette di «vedere» la soluzione.
Addizione e sottrazione	• Permette di determinare le soluzioni esatte. • È particolarmente vantaggioso quando le due equazioni del sistema, ridotto a forma normale, presentano due termini nella stessa incognita che sono uguali od opposti.	• Non permette di «vedere» la soluzione.
Cramer	• Permette di determinare le soluzioni esatte. • Può essere più conveniente del metodo di sostituzione quando nel sistema, ridotto a forma normale, tutti i coefficienti delle incognite sono diversi da 1. • Può essere facilmente tradotto in un algoritmo da fare eseguire a un computer.	• Non permette di «vedere» la soluzione. • Il procedimento si basa sull'utilizzo di formule mnemoniche.